תרגיל בית 3 – סיגמא אלגברות ומידות כלליות

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

   א. הראו כי B הינה מדידה לבג.(רמז: הציגו את B כך $B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$)

   ב. אם $m(A_n)>\delta>0$ לכל n, הראו כי $m(B)>\delta$.

   ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty}m(A_n)<\infty$ אז $m(B)=0$.

   ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$ אבל $m(B)=0$.

2. יהיו $\mathfrak{A}_1$ ו $\mathfrak{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\sigma(\mathfrak{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathfrak{A}_1)=\sigma(\mathfrak{A}_2)$.

3. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A\in\sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{E}$ כך ש $A\in\sigma(\mathfrak{D})$.

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש.

4. נניח ו $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X,S) ו $\mu_n(A)\uparrow$ לכל $A\in S$ וגם $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.