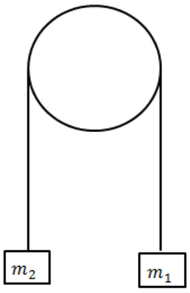
פרק 7: גוף צפיד

נתייחס אל הגוף כאל המון גופים קטנים. מתקיים $\bar{L} = m_i l_i r_i \omega(\sin\alpha_i\,\hat{z} + \cos\alpha_i\,\hat{r})$ וגם $L_z^i = m_i r_i^2 \omega$. נכליל כדי לקבל את הביטוי $L_z = \sum_i L_i = \omega \overbrace{\sum_i m_i r_i^2}^{I}$. אומרים ש$I$ הוא מומנט ההתמד, או באנגלית *Moment of Inertia*. הביטוי הוא עבור גופים בדידים, בתרגיל הבית נוכיח עבור דיסקרטיים.

ובאופן כללי, נקבל נוסחה חדשה $\bar{\tau}_{ext} = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{dt}$. אם הז τ הוא אפס, נקבל ש$I\omega$ קבוע, כמו שניתן לראות ברקדניות על קרח. ברגע שהן סוגרות את הידיים שלהן הן מתחילות להאיץ, כי הן מקטינות את I מה שגורם להגדלת של ω .

הרצאה 24

<u>גלגלת</u>:



דוגמה: נתונה גלגלת (זו שמשמאל) ועליה שתי מסות. מסת m_1 גדולה מזו של m_2. רדיוס הגלגלת R, וI נתון.

מתקיים $\Delta\tau\omega R = \Delta y$ ולכן $v = \omega R$. מכאן ש$a_{rope} = R\frac{d\omega}{dt}$ (בהנחה שהחוט חסר מסה). ואז נקבל את הטורקים השונים: $\tau_{ext} = R(T_1 - T_2)\quad,\quad \tau_1 = RT_1$. לפי החוק של גוף קשיח, ולפי חוקי ניוטון, נקבל שלוש משוואות $\begin{matrix} I\frac{d\omega}{dt} = R(T_1 - T_2) \\ m_1\ddot{y}_1 = T_1 - m_1 g \\ m_2\ddot{y}_2 = T_2 - m_2 g \end{matrix}$ ונוסיף תנאי הכרחי, הרי אורך החבל קבוע, ולכן נקבל $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$. יש לנו ארבע משוואות בארבעה נעלמים. נבצע את החישובים הדרושים על מנת לקבל $T_1 - T_2 = (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + (m_1 - m_2)g$. ע״פ המשוואה הראשונה נקבל $I\frac{d\omega}{dt} = R[(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + (m_1 - m_2)g]$ נציב על מנת לקבל את התאוצה של המסה הימנית, וע״י חישוב והעברת אגפים נקבל $\ddot{y}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$.

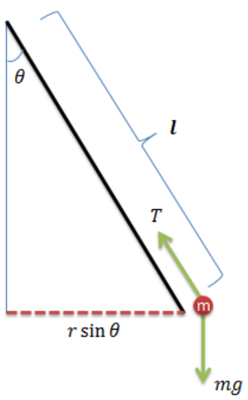
כעת נביט בבעיה בשימוש אנרגיות,נקבל את הביטוי $\Delta U_p = m_1 g \Delta y_1 + m_2 g \Delta y_2 = m_1 g\left(\frac{1}{2}\ddot{y}_1 t^2\right) + m_2 g\left(\frac{1}{2}\ddot{y}_2 t^2\right) = \frac{1}{2}\ddot{y}_1 g t^2 (m_1 - m_2)$. נמצא גם את השינוי באנרגיה הקינטית, המערכת מתחילה ממנוחה, לכן השינוי באנרגיה הקינטית היא הסופית, ונקבל $E_k' = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_1^2 m_1 t^2 + \frac{1}{2}\ddot{y}_2^2 m_2 t^2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_1^2 t^2 (m_1 + m_2)$, וניתן לראות שהשינוי באנרגיה אינו זהה, כי חלק מהאנרגיה הלכה לגלגלת. נחלק את הגלגלת לחתיכות קטנות, כמו שעשינו עד כה כשרצינו לחשב דברים כאלה, ונסמן עבור כל חלק $v_i = r_i\omega$.האנרגיה הקינטית נתונה ע״י $E_k^i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$ ושל הגלגלת כולה, נבצע סכימה בדידה (דיסקרטית) ונקבל $E_k^W = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \overbrace{\sum_i m_i r_i^2}^{I} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\,\frac{\ddot{y}_1^2 t^2}{R^2}$. ושוב , האנרגיה הקינטית ההתחלתית היא אפס, ולכן $E_k^W = \Delta E_k$.

נחשב את השינוי האנרגיה הכוללת: $\Delta E_T = \frac{1}{2}\ddot{y}_1^2 t^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2}\ddot{y}_1 g t^2 (m_1 - m_2) + \frac{1}{2}I\,\frac{\ddot{y}_1^2 t^2}{R^2} = 0$

חיכוך כאן לא בא לידי ביטוי, כי אין החיכוך עובד עבודה.

<u>מטוטלת</u>:

כעת נעבור לדון במקרה אחר, של מטוטלת פיסיקאלית.



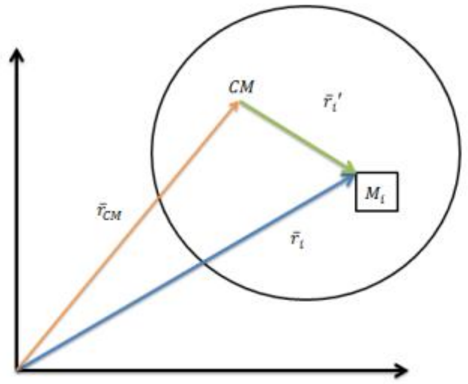
דוגמה: נביט במטוטלת שמשמאל, וננתח את תנועתה. נפתח ע״פ נוסחה $\tau = \bar{r} \times \bar{F} = -mgl\sin\theta$. נקבל שמתקיים $L = ml^2\dot{\theta}$ וגם $\tau = \dot{L}$. נשווה ונבודד כל מנת לקבל $-\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta \approx \frac{g}{l}\theta$. הפתרון הכללי הוא (ע״פ הרצאות קודמות) $\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,,\,\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

כמו כן: $\bar{\tau} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \sum_i \bar{r}_i \times (-m_i g\hat{y}) = -\sum_i m_i \bar{r}_i \times g\hat{y} = -M\bar{R}_{CM} \times g\hat{y} = Mg\bar{R}_{CM} \times -\hat{y}$

ואז מתקבל $\tau = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta}$. אם נציב הכל, נקבל $I\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta = -Mgl\theta$ וזהו משוואה דיפרנציאלית נוספת, שהיא $\ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{I}\theta$, ותדר התנודות במקרה הזה הוא $\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$. ולכן $\omega_{\text{pointile}} = \sqrt{\frac{Mgl}{Ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$. ע"פ משפט שטיינר, שהוכח בתרגול, מתקיים $I' = I_{CM} + MR^2 \underbrace{=}_{I_{CM}=\sum_i M_i r_i = MR^2} 2MR^2$.

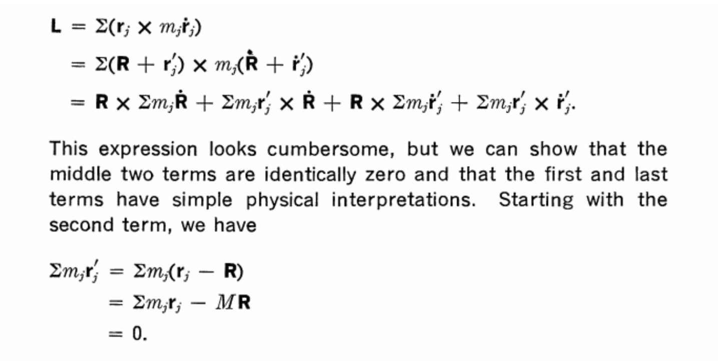
הרצאה 25

נביט בתנועה יחד עם ציר נע, ונבחר איזשהו גוף קשיח כמו בסרטוט משמאל.



מתקיים , ע"פ חוקי הווקטורים, $\bar{r}_i = \bar{r}_{\text{CM}} + \bar{r}_i'$. התנע הזוויתי של הגוף הקשיח נתון ע"י הפיתוח ה :

$\vec{L} = \sum_i m_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i = \sum_i m_i (\bar{r}_{\text{CM}} + \bar{r}_i') \times (\dot{\bar{r}}_{\text{CM}} + \dot{\bar{r}}_i') = \sum_i m_i \bar{r}_i' \times \dot{\bar{r}}_i' + \sum_i m_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{R}}_{CM} + \sum_i m_i \bar{R}_{CM} \times \dot{\bar{r}}_i + \sum_i \bar{R}_{CM} \times \bar{R}_{CM}$. נוכיח שמתקיים באופן כללי $\sum_i m_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{R}}_{CM} = \sum_i m_i \bar{R}_{CM} \times \dot{\bar{r}}_i$. ידוע שמתקיים



$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \Sigma(\mathbf{r}_j \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j)\\ &= \Sigma(\mathbf{R} + \mathbf{r}_j') \times m_j(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}_j')\\ &= \mathbf{R} \times \Sigma m_j \dot{\mathbf{R}} + \Sigma m_j \mathbf{r}_j' \times \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \Sigma m_j \dot{\mathbf{r}}_j' + \Sigma m_j \mathbf{r}_j' \times \dot{\mathbf{r}}_j'.\end{aligned}$$

This expression looks cumbersome, but we can show that the middle two terms are identically zero and that the first and last terms have simple physical interpretations. Starting with the second term, we have

$$\begin{aligned}\Sigma m_j \mathbf{r}_j' &= \Sigma m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{R})\\ &= \Sigma m_j \mathbf{r}_j - M\mathbf{R}\\ &= 0.\end{aligned}$$

ולכן מתקבל שלכל גוף קשיח $\bar{L} = \sum m_i \bar{r}_i' \times \dot{\bar{r}}_i' + M\bar{R}_{CM} \times \bar{V}_{CM}$.

הרצאה 26

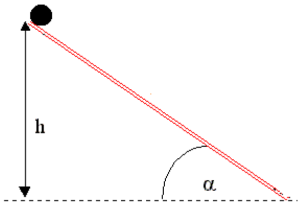
דוגמא מומלצת מעמוד 262 בספר (פרק 6) . מופיעה בנספח לסיכום.

הראנו שמתקיים $\bar{L} = \underbrace{\sum_i m_i \bar{r}_i' \times \dot{\bar{r}}_i}_{I\omega} + \underbrace{M\bar{R}_{CM} \times \bar{V}_{CM}}_{Orbital}$. וגם הראנו שניתן להפריד את הטורק ולקבל $\tau = \underbrace{\sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i}_{\tau_{spin}} + \bar{R}_{CM} \times \bar{F}_T$. ומתקיים $\sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i = \frac{d}{dt}\vec{L}_{spin} = \frac{d}{dt}[I\omega]$.

הדבר האחרון שנרצה לעשות בקורס זה, זה לפרק את האנרגיה הקינטית לזו של מרכז המסה ושל שאר הגוף. בהמשך לשרטוט מהרצאה קודמת נפתח ביטוי $E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{R}_{CM} + \dot{r}_i'\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i'^2 + \frac{1}{2}\dot{R}_{CM}^2 \sum_i m_i$. ורק מצטרך להוכיח שמתקיים $\sum_i m_i \dot{\bar{R}}_{CM} \dot{r}_i' = 0$. למרות שזה נראה טריוויאלי, נוכיח זאת :

$\sum_i m_i \dot{\bar{R}}_{CM} (\dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{R}}_{CM}) = \sum_i m_i \dot{\bar{R}}_{CM} \dot{r}_i' = \underbrace{\dot{\bar{R}}_{CM} \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i}_{\dot{\bar{R}}_{CM} \cdot M \cdot \bar{V}_{CM}} - \underbrace{\sum_i \dot{\bar{R}}_{CM} m_i}_{\dot{\bar{R}}_{CM} \cdot M \cdot \bar{V}_{CM}} = 0$. ובזה תם החומר לסמסטר זה בקורס מכניקה!

פתרון בעיות :



דוגמא 1 : בהתאם לשרטוט מימין, גוף נקודתי מחליק. מפתרון בעיות קודמות ידוע לנו שבהנחה ואין חיכוך המהירות בסופו תהיה שווה ל$v = \sqrt{2gh}$.

כעת נפתור את הבעיה בהנחה והגוף הוא צפיד : מתקיים כי האנרגיה הפוטנציאלית ההתחלתית היא עדיין $U_p = mgh$. וגם $E_k = E_k^{spin} + E_k^{orbit} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$ וידוע מהרצאה קודמת כי $|\omega R| = |v|$. נציב את זה בביטוי לאנרגיה הקינטית ונקבל $E_k = \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} mv^2$ נשווה זאת לאנרגיה הפוטנציאלית ונקבל את המהירות בקצה $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{MR^2}}}$, ובירור מדובר במהירות קטנה מזו של גוף נקודתי, ז"א שהתבזבזה אנרגיה על הסיבוב עצמו של הגוף.

כעת נפתור את אותה הבעיה בעזרת כוחות וטורקים.

מתקיים $\sum_i F_i = \overbrace{N\hat{N} - mgcos\theta\hat{N}}^{0} + mgsin\theta\hat{T} - f_\mu\hat{T}$ ולכן $ma = mgsin\theta - f_\mu$. מתקיים כי $\tau_{\text{spin}} = -f_\mu R$. וגם ידוע לנו כי $\tau_{\text{spin}} = \dot{L}_{spin} = I\dot{\omega}$ ומתקבל ע״י השוואה $I\dot{\omega} = -f_\mu R$. הוכחנו בהרצאה קודמת במקרה של חוסר החלקה שמתקיים $\omega = -\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$, נגזור ונציב זאת ונקבל $f_\mu = I\frac{a}{R^2}$. נציב זאת חזרה במשוואת התנועה, ונקבל $ma = mgsin\theta - I\frac{a}{R^2}$. נחלץ כעת את התאוצה ונקבל את הביטוי $a = \frac{gsin\theta}{1+\frac{I}{mR^2}}$. ידוע ש$\frac{1}{2}at^2 = \frac{h}{sin\theta}$ נציב הכל יחד במשוואה $v = at$ ונקבל את המהירות $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{MR^2}}}$ בדומה לדרך הקודמת.

דוגמא 2 :

כעת נפתור בעיה של כדור באולינג. מתקיים $Ma = -f_\mu$ ולכן $v = v_0 - \frac{f_\mu}{M}t$ ומתקיים $\tau = \mathrm{I}\dot{\omega}$ ולכן $\omega = -\frac{f_\mu Rt}{I}$. נחפש את הזמן בו אין החלקה יותר, ז״א הזמן שמקיים $-\frac{v_0}{R} + \frac{f_\mu t^*}{MR} = -\frac{f_\mu Rt^*}{I}$ ונבודד כדי לקבל $t^* = \frac{Mv_0}{f_\mu\left[\frac{1}{R}+\frac{MR}{I}\right]} = \frac{Mv_0}{f_\mu\left[1+\frac{MR^2}{I}\right]}$ נציב זאת בביטוי למהירות כדי לקבל את המהירות באותו רגע $v = v_0 - \frac{f_\mu}{M}\frac{Mv_0}{f_\mu\left[1+\frac{MR^2}{I}\right]} = \frac{v_0}{1+\frac{I}{MR^2}}$.

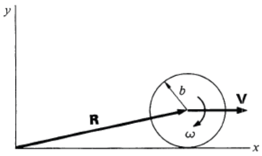
אם ניקח כדור אחד, ונסמן $I = \frac{2}{5}MR^2$ והמהירות לאחר שההחלקה מפסיקה היא $v = \frac{5}{7}v_0$. מעניין לראות שהמהירות הסופית אינה תלוי בחיכוך. כמה עבודה עשה הגוף עד שהפסיק את ההחלקה? $w = \int F\,dx = \int_{t_o}^{t^*} Fvdt$ וזוהי עבודת כח החיכוך.

תם ונשלם הסמסטר!

☺ בהצלחה במבחן ☺

נספח:

Example 6.14 Angular Momentum of a Rolling Wheel



In this example we apply Eq. (6.13) to the calculation of the angular momentum of a uniform wheel of mass M and radius b which rolls uniformly and without slipping. The moment of inertia of the wheel about its center of mass is $I_0 = \frac{1}{2}Mb^2$ and its angular momentum about the center of mass is

$$\begin{aligned} L_0 &= -I_0\omega \\ &= -\tfrac{1}{2}Mb^2\omega. \end{aligned}$$

L_0 is parallel to the z axis. The minus sign indicates that L_0 is directed into the paper, in the negative z direction.

If we calculate the angular momentum of the center of mass of the wheel with respect to the origin, we have

$$(\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z = -MbV.$$

The total angular momentum about the origin is then

$$\begin{aligned} L_z &= -\tfrac{1}{2}Mb^2\omega - MbV \\ &= -\tfrac{1}{2}Mb^2\omega - Mb^2\omega \\ &= -\tfrac{3}{2}Mb^2\omega, \end{aligned}$$

where we have used the result $V = b\omega$, which holds for a wheel that rolls without slipping.

Torque also naturally divides itself into two components. The torque on a body is

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \Sigma\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j \\ &= \Sigma(\mathbf{r}'_j + \mathbf{R}) \times \mathbf{f}_j \\ &= \Sigma(\mathbf{r}'_j \times \mathbf{f}_j) + \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \end{aligned} \qquad 6.14$$

where $\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{f}_j$ is the total applied force. The first term in Eq. (6.14) is the torque about the center of mass due to the various external forces, and the second term is the torque due to the total external force acting at the center of mass. For fixed axis rotation $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$, and Eq. (6.14) can be written

$$\tau_z = \tau_0 + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z, \qquad 6.15$$

where τ_0 is the z component of the torque about the center of mass. But from Eq. (6.13) for L_z we have

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= I_0\frac{d\omega}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z \\ &= I_0\alpha + (\mathbf{R} \times M\mathbf{a})_z. \end{aligned} \qquad 6.16$$

Using $\tau_z = dL_z/dt$, Eq. (6.15) and (6.16) yield

$$\begin{aligned} \tau_0 + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z &= I_0\alpha + (\mathbf{R} \times M\mathbf{a})_z \\ &= I_0\alpha + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z, \end{aligned}$$

since $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. Hence,

$$\tau_0 = I_0\alpha. \qquad 6.17$$

According to Eq. (6.17), rotational motion about the center of mass depends only on the torque about the center of mass, independent of the translational motion. In other words, Eq. (6.17) is correct even if the axis is accelerating.

These relations will seem quite natural when we use them. Before doing so, we complete the development by examining the kinetic energy.

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}\Sigma m_j v_j^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\Sigma m_j(\dot{\boldsymbol{\rho}}'_j + \mathbf{V})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\Sigma m_j\dot{\rho}'^2_j + \Sigma m_j\dot{\boldsymbol{\rho}}'_j \cdot \mathbf{V} + \tfrac{1}{2}\Sigma m_j V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}I_0\omega^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 \end{aligned} \qquad 6.18$$

The first term corresponds to the kinetic energy of spin, while the last term arises from the orbital center of mass motion.