תירגול 6

20 בנובמבר 2015

הגדרה־ הרכבה\כפל של היחסים $R \subseteq A \times B$ ו־$S, T \subseteq B \times C$ הוא:

$$RS = \{(x,z) \mid \exists y \in B, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$$

1. הוכח או הפרך:
   א. $RS = ST \to S = T$?
   ב. $RS = SR$?
   ג.$T \subseteq S \to RT \subseteq RS$? פתרון:

   א. כמובן שלא דוגמה נגדית $A = \{1,2\}$ ניקח יחסים R, S מעל A, $R = T = \{(1,1)\}, S = \{(1,1),(2,2)\}$.

   ב. כמובן שלא אם $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times A$ אז $RS \subseteq A \times A$ ו־ $SR \subseteq B \times B$.

   ג. הוכחה, יהי $(x,z) \in RT$ לפי ההגדרה קיים $y \in B$ המקיים $(x,y) \in R$ וגם $(y,z) \in T$ אולם $T \subseteq S$ ולכן $(y,z) \in S$ ולכן $(x,z) \in RS$

2. יהיו $S, T \subseteq B \times C$ ו־ $R \subseteq A \times B$.
   א. הוכיחו כי: $R(S \cap T) \subseteq RS \cap RT$
   ב. הבא דוגמה בה אין שויון.
   פתרון:
   א. יהי $(a,c) \in R(S \cap T)$ אזי מתקיים:

$$\begin{array}{rcl}
(a,c) & \in & R(S \cap T) \\
 & \Updownarrow & \\
\exists b \in B, (a,b) \in R & \wedge & (b,c) \in (S \cap T) \\
 & \Updownarrow & \\
\exists b \in B, (a,b) \in R & \wedge & (b,c) \in S \wedge (b,c) \in T \\
 & \Updownarrow & \\
\exists b \in B, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S & \wedge & (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T \\
 & \Downarrow & \\
(a,c) \in RS & \wedge & (a,c) \in RT \\
 & \Updownarrow & \\
(a,c) & \in & RS \cap RT
\end{array}$$

ב. $A=B=C=\{1,2\}$ $R=\{(1,1),(1,2)\},T=\{(1,1)\},S=\{(2,1)\}$
מתקיים: $R\cap S=\phi$ ולכן $R(S\cap T)=\phi$ אולם $RT=RS=\{(1,1)\}$.

3. יהי R יחס רפלקסיבי מעל A, הוכיחו כי לכל n מתקיים $R\subseteq R^2\subseteq\cdots\subseteq R^n$.
פתרון:

$I_A\subseteq R\Rightarrow I_AR^n=R\subseteq RR^n=R^{n+1}$ (מתבסס על שאלה 1 סעיף ג)

4. הוכיחו כי אם R טרנזיטיבי מעל A אזי R^n טרנזיטיבי לכל $n\in\mathbb{N}$.
פיתרון:

נוכיח תחילה טענת עזר:

R טרנזיטיבי אמ"מ $R^2\subseteq R$

הוכחה:

$(\Rightarrow)$: אם R טרנזיטיבי:

יהי

$$\begin{array}{rcl}(x,z) & \in & R^2\\ & \Downarrow & \\ \exists y\in A,(x,y)\in R & \wedge & (y,z)\in R\\ & \Downarrow & \\ (x,z) & \in & R\\ & \Downarrow & \\ R^2 & \subseteq & R\end{array}$$

$(\Leftarrow)$: נניח כי $R^2\subseteq R$:

יהי

$$\begin{array}{rcl}(x,y),(y,z) & \in & R\\ & \Downarrow & \\ (x,z) & \in & R^2\\ & \Downarrow & \\ (x,z) & \in & R\end{array}$$

לכן גם $R^{n+1}=R^2R^{n-1}\subseteq RR^{n-1}=R^n$ ולכן R^n טרנזטיבי.