אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מספרי הקורס: 8821105 8821107
המרצים: דבורה קפלן ומיכאל מגרל
מתרגלים: לואי פולב ומיכאל פרידמן
תאריך: 31.08.2010 מועד א'

פתרונות :

1. א. תנו דוגמה של מבנה אלגברי עם 2 אלמנטים שהוא לא אגודה.

למשל נגדיר:

*	a	B
a	b	B
b	b	A

הפעולה היא לא אסוציאטיבית : $(aa)b = a \neq b = a(ab)$

ב. הוכח כי לכל מונויד $(X,\cdot)$ קבוצה $P_*(X)$ של תת קבוצות לא ריקות מגדירה מונויד לגבי כפל טבעי $A \bullet B := \{a \cdot b \mid \quad a \in A, b \in B\}$.

מה הם ההפיכים ב $(P_*(X),\bullet)$?

הפעולה מוגדרת היטב וסגורה ב $P_*(X)$.

קל לבדוק את <u>האסוציאטיביות</u> שמתבססת על האסוציאטיביות של הפעולה ב X.

<u>איבר ניטרלי</u> $\{e\}$.

האיברים ההפיכים של המונואיד $P_*(X)$: הקבוצות בצורה $\{a\}$ עבור a הפיך ב X

ג. פתרו את $17^{2019}x \equiv 10 \bmod 50$.

$\varphi(50) = 20$, $(17,50) = 1$ בעזרת משפט Euler 2 נקבל

$$17^{2019} = 17^{100\cdot 20+19} = \left(17^{20}\right)^{100} 17^{19} \equiv 17^{19} (\bmod 50) \Leftrightarrow$$

$$17^{19}x \equiv 10 (\bmod 50) \Leftrightarrow 17^{20}x \equiv 170 (\bmod 50) \Leftrightarrow x \equiv 170 (\bmod 50) \Leftrightarrow$$

$$x \equiv 20 (\bmod 50)$$

---

2. א. הוכיחו שאם הסדר של כל איבר (פרט לנייטרלי) בחבורה G הוא 2 אזי G אבלית ותנו דוגמה של חבורה אינסופית כזאת.

$D_3 \times$

דוגמא : למשל מכפלה קרטזית הבאה $_2 := {}_2\times \; {}_2\times .....$

(או $\{ (x_1, x_2, \cdots) \mid x_n \in \{1,-1\} \} = \Omega_2$ עם כפל רכיב-רכיב)

ב. עבור החבורה $G:=<\overline{15}>\leq(Z_{50},\oplus)$ מצאו כמויות של: יוצרים אפשריים, אוטומורפיזמים ותת חבורות.

$$\frac{50}{(50,15)}=10\Rightarrow|G|=order\left\langle 15\cdot\bar{1}\right\rangle=10$$

כלומר G חבורה ציקלית מסדר 10. לכן

<u>מספר יוצרים</u> אפשריים שווה: $\varphi(10)=4$.

(הערה: אם היינו שואלים על <u>תאור היוצרים של G</u>, לא רק הכמות,

אז התשובה היא הקבוצה הבאה: $\{n\cdot\overline{15}\in Z_{50}:\ \ 1\leq n<10,(n,10)=1\}$)

ולכן יש גם **<u>4 אוטומורפיזמים של G</u>** (מוגדר חד-משמעית כשמעבירים $\overline{15}$ ליוצר אחר).

<u>כמה תת חבורות יש ל G ?</u>: יש 4 תת חבורות כי המחלקים של 10 הם 1, 10, 2, 5.

(אם היינו שואלים על <u>תאור תת חבורות של G</u>

לכל מחלק m של 10 יש תת חבורה $H=\left\langle\frac{10}{m}\cdot\overline{15}\right\rangle\leq G$ מסדר m.)

ג. הסבירו מדוע חבורה $(Q_+,\cdot)$ של רציונליים חיוביים היא לא נוצרת סופית.

האם $(Q_+,\cdot)$ איזומורפית לחבורה $(Q,+)$ של רציונליים ?

נניח בשלילה $Q_+=\left\langle\frac{a_1}{b_1},....,\frac{a_n}{b_n}\right\rangle$, כאשר בה"כ השברים אחרי הצמצום. אם נפרק כל מכנה לגורמים ראשונים, יהיה לנו מספר סופי של גורמים ראשונים בסך הכל שמשתתפים בפירוק של כל n המכנות. אם p מספר ראשוני שונה מכל אלה, אזי $\frac{1}{p}$ לא מתקבל על ידי היוצרים האלה.

<u>למה לא איזומורפיות החבורות הנתונות</u> : נניח קיים איזומורפיזם $f:Q\to Q_+$, אזי יש מקור x רציונלי ל 2 : $f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=2\to f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2})=2$. אז הגענו למספר רציונלי שבבוע נותן לנו 2: **סתירה!**.

---

3. א. הוכח או הפרך: קיימת חבורה G ומונומורפיזם $G\to G$ שהוא לא איזומורפיזם.

כן קיים . למשל

$f:\ \ \to\ \ ,\ \ f(m)=3m$

ב. הוכח או הפרך: לא קיים אפימורפיזם $Z^2\to\Omega_{2010}\times Z_{999}\times\Omega_{50}$.

כן קיים

$$\boxed{\begin{array}{l}\Omega_{2010}\times Z_{999}\times\Omega_{50}\cong Z_{2010}\times Z_{999}\times Z_{50}\cong Z_{2010}\times Z_{999\cdot 50}\\ f:Z\times Z\to Z_{2010}\times Z_{999\cdot 50}\\ f(a,b)=(\overline{a},\overline{b})\end{array}}$$

העתקה f אפימורפיזם , ואז ההרכבה $f\circ g$ עבור האיזומורפיזם שמעתיק החבורה השניה ל $Z_{2010}\times Z_{999\cdot 50}$ מהווה אפימורפיזם.

ג. מצאו איזומורפיזם $R_+\times\Omega_2\cong R^*$ ותארו תת חבורה H בחבורה $G:=C^*\times D_{100}$ כך שחבורת מנה G/H איזומורפית ל R^*.

נגדיר : $\left.\begin{array}{l}f:R^*\to R_+\times\Omega_2\\ f(a)=\left(\lvert a\rvert,signa\right)\end{array}\right\}$ (קל לבדוק שזה איזומורפיזם)

העתקה $\left.\begin{array}{l}g:C^*\to R_+\\ g(z)=\lvert z\rvert\end{array}\right\}$ מהווה אפימורפיזם, והגרעין הוא T "מעגל היחידה"

ואז: $C^*/T\cong R_+$ (משפט איזו 1). בנוסף לזה $D_{100}/C_{100}\cong\Omega_2$, ואז :

$$\left(C^*\times D_{100}\right)/\left(T\times C_{100}\right)\cong C^*/T\times D_{100}/C_{100}\cong R_+\times\Omega_2$$

לכן התשובה היא ת"ח $H:=T\times C_{100}$.

---

4. א. הוכיחו את משפט Cayley . הוכחנו בהרצאה.

ב. בחבורה דיהדרלית $(D_3,\cdot)$ מצאו תת חבורה H ואיברים $x,y\in D_3$ כך שהקבוצה $(xH)\cdot(yH)$ לא שווה ל $(xy)H$.

$D_3=\left\{e,\alpha,\alpha^2,\beta,\beta\alpha,\beta\alpha^2\right\}$ $D_3=<\alpha,\beta\mid\ \alpha^3=e,\beta^2=2,\beta\alpha=\alpha^{-1}\beta>$.

ניקח ת"ח לא נורמלית $H=\{e,\beta\}\le D_3$.

למשל עבור $x=\alpha=y$ מתקבל :

$$xHyH=\left\{e,\beta,\alpha^2,\alpha^2\beta\right\}$$

$$xyH=\left\{\alpha^2,\alpha^2\beta\right\}$$

(שים לב $\alpha(\beta\alpha)=\alpha(\alpha^{-1}\beta)=\beta$).

ג. הוכח או הפרך: קיים מונומורפיזם של חבורות $Z_{21}\to A_{10}$.

כן קיים: ב A_{10} קיים איבר מסדר 21: $a=(1,2,3,4,5,6,7)(8,9,10)$. ואז $Z_{21}\cong H=\langle a\rangle$. נוכל להגדיר את המונומורפיזם $f(\overline{k})=a^k$, $f:Z_{21}\to A_{10}$.

5. א. הוכיחו את משפט Burnside. **הוכחנו בהרצאה.**

ב. הוכח או הפרך: מספר מחלקות צמידות בחבורה S_5 גדול ממספר חבורות אבליות לא ציקליות עם 1200 איברים.

מספר מחלקות הצמידות ב S_5 ניתן לקבל על ידי מספר החלוקות $\rho(5)$ של המספר 5 ולכן שווה ל **7**.

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$. יש $\rho(4)\rho(1)\rho(2) = 10$ חבורות אבליות לא איזומורפיות (עד כדי איזו) בגודל 1200, ולא נספור את הציקלית היחידה (שהיא: $Z_{16} \times Z_3 \times Z_{25} \cong Z_{1200}$) ואז נקבל **9**.

לכן הטענה לא נכונה.

ג. נניח $G \times X \to X$ פעולה של חבורה כפלית

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad a,b,c \in Z_7 \right\}$$

מעל קבוצה X בעלת $|X| = 2010$ איברים. הוכח שקיימת נקודת שבת.

$|G| = 7^3$, ו 7 לא מחלק את $|X| = 2010$, ואז לפי משפט שלמדנו עבור חבורות p נובע ש יש נקודת שבת.

6. א. בעזרת משפטי Sylow הוכיחו שכל חבורה עם 55 איברים היא פתירה.

$$\left. \begin{aligned} &|G| = 55 = 11 \times 5 \\ &n_{11} \equiv 1 (\bmod 11) \\ &n_{11} \mid 5 \end{aligned} \right\} \to n_{11} = 1$$

אם נסמן ב H את החבורה סילו-11 , אז השרשרת : $\{e\} \triangleleft H \triangleleft G$ מקיימת שהמנות הן אבליות (כל מנה היא ציקלית כחבורה מסדר ראשוני). לכן החבורה G היא פתירה.

ב. תנו דוגמה של חבורה סופית לא אבלית פתירה. אותה שאלה עם חבורה אינסופית.

למשל D_3 (או D_n לכל n).

(נקח ת"ח: $H = C_3$. שרשרת הבאה היא נורמלית עם מנות אבליות : $\{e\} \triangleleft H \triangleleft G$: הסדר של $\frac{G}{H}$ הוא 2 ולכן H נורמלית והחבורות מנה אבלית. H ציקלית ולכן אבלית ואז גם המנה $\frac{H}{\{e\}}$ אבלית.)

מקרה אינסופי:

$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a \in {}^{*}, b \in \ \right\}$ או $D_3 \ = D_3 \times D_3 \times \ldots\ldots$ או $D_3 \times \ldots$.

נקח) $H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ b \in \ \right\} \lhd G$ אבלית כי איזומורפית ל

ושרשרת נורמלית $\{e\} \lhd H \lhd G$

חבורת מנה $G/H \cong {}^{*}$ גם אבלית. שימו לב שיש אפימורפיזם $G \to {}^{*}$
עם הגרעין H. דרך אחרת לבדוק: נגזרת ראשונה של G שווה ל H).

ג. נתבונן בחבורה A_5.

- כמה איברים מסדר 3 יש ב- A_5 ?
- כמה חבורות 3-סילו יש ב- A_5 ?
- תהי H תת חבורה 2-סילו של A_5. הוכיחו ש- H אבלית ומצאו לאיזו חבורה אבלית H איזומורפית.

איברי מסדר 3 : הם המחזורים מאורך 3, ישנם $20 = \frac{5!}{3 \cdot 2!} = \binom{5}{3} \cdot 2!$.

חבורות 3-סילו : תת חבורות מסדר 3 הן ציקליות מסדר 3, ואז בהן יש 2 איברים מסדר 3 ו הניטרלי : בצורה $\{e, a, a^2\}$. ואז אם נקח את 20 האיברים מסדר 3 , יהיו לנו 10 תת חבורות.

חבורות 2-סילו : אם H תת חבורה 2-סילו של A_5 , אזי $|H| = 2^2$, ואז היא אבלית (למדנו שחבורות p^2 הן אבליות, דרך אחרת: שאלה 2 א).

אבל H לא ציקליות כי אין איברים מסדר 4 ב A_5 .

מחזורים מסדר 4 הן תמורות אי זוגיות , ולהרכבות אחרות דרך עגילים זרים ב S_5 אין סדר 4.

H לא ציקלית לכן $H \cong \ _2 \times \ _2$.

שנה טובה ! ☺