תרגול 3

3 בנובמבר 2015

הגדרה 0.1 1) סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ נקראת חסומה מלעיל אם קיים מספר M עבורו לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$. מספר M כזה נקרא חסם מלעיל של הסדרה.

2) הסדרה נקראת חסומה מלרע אם יש מספר M נקרא חסם מלרע של הסדרה כך ש־$a_n > M$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

3) סדרה נקראת חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע. תנאי זה שקול לקיומו של מספר M עבורו לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $| a_n |\leq M$. M כזה נקרא חסם של סדרה.

חשוב להדגיש שאם סדרה חסומה מלרע אך אינה חסומה מלעיל אז היא אינה חסומה, ואם היא חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע אז היא אינה חסומה, ולכן כדי להיות חסומה היא חייבת להיות חסומה גם מלרע וגם למעיל.

דוגמאות:

1) הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה מלעיל ע"י 1, ולמרע ע"י 0.

2) הסדרה $(-1)^n$ חסומה מלרע ע"י 1 ומלעיל ע"י 1־.

3) הסדרה $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה מלרע ע"י 0 אך אינה חסומה מלעיל.

4) הסדרה $\{(-1)^n n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינה חסומה מלעיל או מלרע.

טענה 0.2 אם $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרה מתכנסת אז היא חסומה.

הערה 0.3 1) מהטענה נובע שאם סדרה לא חסומה אז היא אינה מתכנסת, למשל סדרה $a_n = n$ אינה חסומה ולכן אינה מתכנסת.

2) ההפך של הטענה אינו נכון: כלומר חסימות של סדרה אינה גוררת התכנסות שלה, למשל: $a_n = (-1)^n$ היא סדרה חסומה אבל אינה מתכנסת.

אריתמטיקה של גבולות

משפט 0.4 יהיו $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרות מתכנסות, כל ש $lim_{n\to\infty}\{a_n\} = A$ ו־$lim_{n\to\infty}\{b_n\} = b$ אזי:

א) לכל קבוע c, $lim_{n\to\infty} ca_n = clim_{n\to n} a_n = cA$.

ב) $lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = lim(a_n) + lim(b_n) = A + B$.

ג) $lim(a_n b_n) = (lim(a_n))(lim(b_n)) = AB$.

ד) אם לכל $n\in\mathbb{N}$, $b_n \neq 0$ וגם $B \neq 0$ אזי $lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{lim(a_n)}{lim(b_n)} = \frac{A}{B}$.

דוגמאות למקרים בהם אין דרישה להתכנסות של $\{a_n\}$ ושל $\{b_n\}$:

1) יהיו $\{a_n\} = (-1)^n$ ו־$\{b_n\} = (-1)^{n+1}$ שתיהן אינן מתכנסות , אבל $a_n + b_n = 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן הסכום של שתי סדרות אלה מתכנס לאפס, והמכפלה של שתיהן נותנת

$-1 \to -1 = a_n b_n$. זו דוגמה מקרה שבו יש שתי סדרות שאינן מתכנסות אך המכפלה והסכום שלהן כן מתכנסים.

2) $a_n = n$ $b_n = n + 1$ מתבדרות אבל $\frac{a_n}{b_n}$ כאן דוגמה לשתי סדרות שאינם מתכנסות אך המנה של שתיהן כן מתכנסת.

מסקנה משתי הדוגמאות הלאה:

בהינתן שתי סדרות שאינן מתכנסות לא ניתן להגיד כלום על הגבול של סכום, מכפלה או מנה של שתיהן.

דוגמאות:

1) $lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n} = lim\left(3+\frac{1}{n}\right) = lim3 + lim\left(\frac{1}{n}\right) = 3+0=3$

2) $lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^2}\right) = lim\,(7)\,lim\left(\frac{1}{n}\right)lim\left(\frac{1}{n}\right) = 7\cdot 0\cdot 0 = 0$

3) $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ נשים לב שהביטוי האחרון שבסוגריים הוא נוסחה כללית עבור כל אחד מהמחוברים. קודם כל נפרק את הביטוי לשברים חלקיים: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$ המטרה שלנו היא מצוא את A, B נעשה מכנה משותף ונקבל את הביטוי:

$1 = (A+B)\,n + A$ מצד ימין של שוויון אין שום איבר שתלוי ב־n ולכן במקרה הזה צד שמאל שווה לצד ימין אם המקדם של n שווה לאפס כלומר $A+B=0$ ולכן $A=-B$ ולכן נקבל ש

$A=1$ $B=-1$ ולכן סה"כ מקבלים: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ולכן ניתן לפי הנוסחה הזאת לפרק כל ביטוי בתוך הסוגריים ונקבל:

$lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right) = lim\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$

$lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = lim1 - lim\frac{1}{n+1} = 1-0=1$ שוויון שני נובע מכך שכל האיברים בתוך הסוגריים מצטמצמים.

משפט 0.5 אם סדרה $\{b_n\}$ היא סדרה חסומה ו־$\{a_n\}$ היא סדרה מתכנסת אזי $lim_{n\to\infty}a_n b_n = 0$.

דוגמה:

סדרת $\left\{\frac{1}{n}\right\}$מתכנסת לאפס, והסדרה $\{sin(n)\}$ היא סדרה חסומה ולכן $lim_{n\to\infty}\frac{sin(n)}{n} = 0$.

כמה טענות שימושיות:

1) תהי $\{a_n\}$סדרה מתכנסת ונניח ש־$a_n \le M$ החל ממקום מסויים. אזי $lim_{n\to\infty}a_n \le M$.

2) אם $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ סדרות המקיימות $a_n \le b_n$ ממקום מסויים ואז $a_n \to a$ וגם $b_n \to b$ אז $a \le b$.

3) תהי $\{a_n\}$ סדרה ויהי $a\in\mathbb{R}$ אזי התנאים הבאם שקולים:

א) $lim\,(a_n) = a$

ב) $lim\,(a_n - a) = 0$

ג) $lim \mid a_n - a \mid = 0$

בפרט $a_n \to 0 \Leftrightarrow \mid a_n \mid \to 0$

4) כלל המנה: יהי $r\in\mathbb{Q}$ ו־$a_n \to a$ ונניח שהחזקה a^r מוגדרת וש־a_n^r מוגדרת החל ממקום מסויים$\Leftarrow$ $a_n^r \to a^r$.

5) אם $a_n \to a$ אז $\mid a_n \mid \to \mid a \mid$.

תרגיל:

הוכח\הפרך את הטענה הבאה: אם $\mid a_n \mid \to \mid a \mid$ אזי $a_n \to a$.

פתרון:
הפרכה: נבחר למשל את $(-1)^n$ברור ש־$1 \to |1| = 1 =| (-1)^n |$ אבל לסדרה הזאת ללא ערך מוחלט אין גבול.
משפט הסנדוויץ

משפט 0.6 (משפט הסנדוויץ) תהיינה ש$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ סדרות ונניח ש־$a_n \le b_n \le c_n$ החל ממקום מסויים ושהסדרות $\{a_n\}$ $\{c_n\}$ שתיהן מתכנסות לאותו גבל L אזי $\{b_n\}\to L$.
דוגמאות:
1) יהי $\alpha > 1$ ותהי סדרה $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. מתקיים לכל n טבעי אי שוויון הבא: $0 \le \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{n}$ אבל הסדרה ההרמונית שואפת לאפס וגם אפס שואף לאפס ולכן לפי משפט הסנדוויץ $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$.

הערה 0.7 $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ גם עבור $0 < \alpha < 1$.
2) תהי $a_n = \frac{1}{2^n}$ ברור ש־$2^n \ge n \Leftarrow \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}$ ושוב לפי משפט הסנדוויץ נסיק ש־$\frac{1}{2^n} \to 0$.

תזכורת: $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ **עבור** $a > 0$.
תרגיל:
חשב את $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}$
פתרון:
נשים לב ש־$2 > \frac{n+1}{n-1} > 1$ לכל $n > 4$ ולכן $\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \le \sqrt[n]{2}$ אבל לפי התזכורת $lim\left(\sqrt[n]{1}\right) = lim\left(\sqrt[n]{2}\right) = 1$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \to 1$.
הערה חשובה:
מפתה לתת את הפתרון הבא: ידוע ש־$\frac{n+1}{n-1} \to 1$ ואז $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \to \sqrt[n]{1} \to 1$ אבל הפתרון הזה לא נכון!! לא ניתן להשאיף את n בשלבים, אחרת אנחנו יכולים להגיע לתוצאות שגויות.
לדוגמה: $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}$, ראינו ש־$\frac{1}{2^n} \to 0$ ולכן מפתה לרשום $\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \to \sqrt[n]{0} \to 0$ אבל זה כמובן לא נכון! כי $\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

תרגיל:

חשב את הגבול של $a_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}$.
פתרון:
נרצה, כמו בתרגיל הקודם להשתמש במשפט הסנדוויץ, נשים לב ש־$7^n \le 4^n + 7^n \le 7^n + 7^n = 2 \cdot 7^n$ נשתמש בתזכורת ונוצאי שורש n־י משלושת ביטויים ונשעיף את n לאינסוף ונקבל: $7 \le \sqrt[n]{4^n + 7^n} \le \sqrt[n]{2} \cdot 7$, שוב לפי התזכורת $\sqrt[n]{2} \to 1$ ולכן שני הצדדים שואפים ל־7 ולכן לפי משפט הסנדוויץ נקבל שגם $\sqrt[n]{4^n + 7^n} \to 7$.
תרגיל:
חשב את $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.
פתרון:
נרשום $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ נרצה למצוא שתי סדרות $\{b_n\}$ ו־$\{c_n\}$ שיש להן גבול זהה כך שמתקיים $b_n \le a_n \le c_n$ ואז נוכל להשתמש במשפט הסנדוויץ.
אם נגדיל את המכנה של כל אחד מהמחוברים אז נקבל: (הסכום כאן הוא n פעמים) $a_n \ge \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ מצד שני אם נקטין את המכנה של כל אחד מהמחוברים אז נקבל: $a_n \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ (גם כאן הסכום הוא

nפעמים). סה"כ $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ אבל $lim\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = lim\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ נקבל ש־$lim_{n\to\infty}\left(a_n\right) = 1$.

$$lim\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right) = lim\left(\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right) = 1$$

$$lim\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = lim\left(\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) = 1$$