המרחב הניצב   תרגול 11

הגדרה: יהי V ממ״פ, $S\subseteq V$ קב׳ כלשהי

המרחב הניצב ל-S $\rightarrow$ $S^{\perp}=\{v\in V \mid \forall s_i\in S: v\perp s_i\}$

הערה: אפילו אם S לא ת״מ עדין $S^{\perp}$ ת״מ!!

דוג׳:

(1) $V^{\perp}=\{0\}$ $\leftarrow$ לוודא בבירור למה

(2) $\{0\}^{\perp}=V$

(3) ניקח $V=\mathbb{R}^2$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\Leftarrow$ $S^{\perp}=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(4) $V=\mathbb{R}^4$, $S=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$

אזי:

$$S^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\rangle=0 \\ \text{וגם} \\ \left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{matrix}\right\}$$

ע״פ כלן של $\mathbb{R}^4$ $\rightarrow$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}x+2y+3z+4w=0\\3x-y+2z+5w=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\3&-1&2&5&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{(2) }\frac{1}{7}R_2]{\text{(1) }R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&2&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-z-2w\\-z-w\\z\\w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל: הוכח שאם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$

הוכחה: ניקח $v_2' \in S_2^\perp$

$$\Downarrow$$

$$\forall v_2 \in S_2 : \langle v_2', v_2 \rangle = 0$$

כיוון ש- $S_1 \subseteq S_2$ אזי בפרט לכל $v_1 \in S_1$ מתקיים

$$\langle v_2', v_1 \rangle = 0$$

$\Leftarrow v_2' \in S_1^\perp$

[redacted] משל

תרגיל: יהי $\underset{\text{מ"פ}}{V}$, $\underset{\text{ת"מ}}{U} \subseteq V$, $v \notin U$.

צ"ל שקיים $\vec{x} \in V$ כך ש- $\vec{x} \perp U$ וגם ש- $\vec{x} \not\perp v$

פתרון: נגדיר בסיס ל- U: $\{w_1, \ldots, w_k\}$

ונרחיב אותו לבסיס של V: $\{\underbrace{w_1, \ldots, w_k}_{\text{בסיס של } U}, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$

נפעיל גרם שמידט על בסיס זה

ונקבל בסיס א"נ: $\{\underbrace{\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_k}_{\text{בסיס א"נ ל- } U}, \tilde{w}_{k+1}, \ldots, \tilde{w}_n\}$

(כי בגרם שמידט
בכל שלב זה הופך את
מה שהרחבנו אל הווקטורים
של אותו שלב "טיפלנו")

לכן,

$$v = \alpha_1 \tilde{w}_1 + \ldots + \alpha_k \tilde{w}_k + \alpha_{k+1} \tilde{w}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \tilde{w}_n$$

$v \notin U$ ולכן בפרט $v \neq 0$

קיים $\alpha_i \neq 0$ עבור $i \geq k+1$ (כי אם $\alpha_i = 0$ לכל $i \geq k+1$ אז $v \in U$)

עבור אותו i נגדיר $\vec{x} = \alpha_i \tilde{w}_i$

נראה שהוא מקיים את התנאים המבוקשים:

(1) נוכיח $\vec{x} \perp U$: יהי $u \in U$ אזי ניתן להציג:

$$u = \beta_1 \tilde{w}_1 + \ldots + \beta_k \tilde{w}_k$$

$$\Rightarrow \langle u, \vec{x} \rangle = \langle \beta_1 \tilde{w}_1 + \ldots + \beta_k \tilde{w}_k, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle =$$

לינאריות ברכיב הראשון

$$\beta_1 \langle \tilde{w}_1, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle + \dots + \beta_k \langle \tilde{w}_k, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle =$$

$$= \beta_1 \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_i \rangle}_{0} + \dots + \beta_k \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_k, \tilde{w}_i \rangle}_{0} = 0$$

ולכן $\Leftarrow$ $\vec{x} \perp U$

(2) נניח $v \not\perp \vec{x}$: נוכיח זאת ע"י שנראה ש- $\langle v, \vec{x} \rangle \neq 0$

ואכן:

$$\langle v, \vec{x} \rangle = \langle \alpha_1 \tilde{w}_1 + \dots + \alpha_n \tilde{w}_n, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle =$$

$$\overset{\text{כמו קודם}}{=} \dots = \alpha_1 \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_i \rangle}_{0} + \dots + \alpha_i \bar{\alpha}_i \langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle$$

$$+ \dots + \alpha_n \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_n, \tilde{w}_i \rangle}_{0}$$

$$\overset{\substack{\text{לכל } j \neq i \\ \langle \tilde{w}_j, \tilde{w}_i \rangle = 0}}{=} \alpha_i \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle}_{\substack{1 \\ \text{כי לקחנו בסיס א"ן}}} = |\alpha_i|^2 \underset{\substack{\text{כי} \\ \alpha_i \neq 0}}{\neq} 0$$

משפט [redacted]

<u>תרגיל</u> הוכח/הפרך: (א) $W = (W^\perp)^\perp$ עבור W ת"מ

(ב) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(ג) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

(א) <u>הוכחה</u> $x \in (W^\perp)^\perp$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall v \in W^\perp$ $\langle x, v \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow$ (1) בהסדר אחרי הפירוק הנ"ל (הריון ?? ???)

$x \in W$

(ב) <u>הוכחה</u>: נוכיח $(U+W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ ע"י הכלה דו כיוונית:

(⊆) $v \in (U+W)^\perp \Rightarrow (v \perp U) \wedge (v \perp W)$

$\Downarrow$

$(v \in U^\perp) \wedge (v \in W^\perp) \Rightarrow v \in U^\perp \cap W^\perp$

ב) $v\in U^\perp \cap W^\perp$

$v\in U^\perp$ וגם $v\in W^\perp$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\forall u\in U \quad \langle v,u\rangle=0$ $\qquad$ $\forall w\in W \quad \langle v,w\rangle=0$

יהי $v'\in U+W$ (ונוכיח $\langle v',v\rangle=0$) אזי $\exists u'\in U,\ w'\in W:\ v'=u'+w'$

ומתקיים $\langle v',v\rangle=\langle u'+w',v\rangle=\langle u',v\rangle+\langle w',v\rangle=0$

מש"ל ∎

ג) הוכחה: נובע מ-(א) ו-(ב) ביחד כי:

לפי (ב) מתקיים $(U^\perp+W^\perp)^\perp=U^{\perp\perp}\cap W^{\perp\perp}$

[הצבנו $U^\perp$ במקום U, $W^\perp$ במקום W]

לפי (א) $\Downarrow$

$(U^\perp+W^\perp)^\perp=U\cap W$

"נפעיל ⊥ על שני האגפים ונקבל"

$(U^\perp+W^\perp)^\perp=(U+W)^\perp$

$\Rightarrow U^\perp+W^\perp=(U\cap W)^\perp$

מש"ל ∎

משפט פירוק הניצב:

יהי V מ"פ מעל F. $W\subseteq V$ ת"מ

אזי $V=W\oplus W^\perp$

לדוגמא: ב-$\mathbb{R}^2$ $\quad W=sp\left\{\binom{1}{0}\right\}$

$W^\perp=sp\left\{\binom{0}{1}\right\}$

ואכן $W\oplus W^\perp=\mathbb{R}^2$

דוג' נוספת: ראינו בתחילת התרגיל שעבור $V = \mathbb{R}^4$

ועבור $W = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$ נקבל $W^\perp = sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ניתן לבדוק שארבעת הוקטורים בת"ל ולכן אכן פורשים את כל $\mathbb{R}^4$ והחיתוך בין W ל-$W^\perp$ הוא רק 0 ולכן אכן מתקיים

$$W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$$

אי-שיוויון בסל:

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי n

ותהי $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ קב' א"נ

יהי $w \in V$ אז:

$$\|w\|^2 \ge \sum_{i=1}^{k} |\langle w, v_i\rangle|^2$$

ואם יש שיוויון אז זה נקרא שיוויון פרסבל

אי-שיוויון קושי שוורץ

יהי V ממ"פ עם נורמה מושרית $(\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle})$

אז: $|\langle v,w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v,w \in V$

74 בס"ד

שאלות ממבחנים!

ממבחן תש"ע → I

תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הדומה למט'

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}2&5&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&7&1\end{pmatrix}}\oplus\overset{B}{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

יהי $f(x)$ הפולינום המתקבל מחלוקת הפ"א של A בפ"מ של A.

אזי בהכרח:

א. $f(x)=(x-1)^3$

ב. $f(x)=(x-2)^2$

ג. $f(x)=(x-1)(x-2)$

ד. אין מספיק נתונים בשאלה

$$A\oplus B=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$$

אצלנו B בלוק ז'ורדן

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&5&0&0\\0&2-\lambda&0&0\\0&0&2-\lambda&0\\0&0&7&1-\lambda\end{vmatrix}=|S|\cdot|T|$$

$$=(2-\lambda)^2(2-\lambda)(1-\lambda)=(2-\lambda)^3(1-\lambda)$$

לכן הפ"א של $A\oplus B$ הוא $=(2-\lambda)^3(1-\lambda)^4$

המכפלה של פ"א של A ושל הפ"א של B.

הפ"מ של $A\oplus B$: בגלל שיש בלוק ז'ורדן $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ אז

שחייב להיות רכיב של $(1-\lambda)^3$ בפ"מ.

צריך לבדוק עבור המטריצה A את $(2-\lambda)^2$ ואת $(2-\lambda)^3$

בס"ד

ונקבל שהנכון הוא $(\lambda-2)^2$

$$\text{פ"מ} = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^3$$

$$\Rightarrow \frac{\text{פ"א}}{\text{פ"מ}} = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

בס"ד

חזרה (לואי)

1 תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה. נניח כי הפ"מ שלה הוא:

$$m_A(x)=(x-2)^2(x-3)$$

א) הוכיחו ש- A הפיכה

ב) מצאו את הפולינום המינימלי של A^{-1}

<u>פיתרון:</u>

א) ידוע ש- A הפיכה $\iff$ 0 <u>אינו</u> ע"ע.

0 אינו שורש לפ"מ $\Leftarrow$ 0 אינו שורש בפ"א (לפי משפט - ל- m_A ול- P_A יש אותם גורמים אי פריקים).

$\Leftarrow$ ידוע $P_A(0)\neq 0$

$$P_A(x)=\det(A-xI)$$

$$\Downarrow$$

$$P_A(0)=\det(A)\neq 0$$

$\Downarrow$ A הפיכה.

ב) נמצא פ"מ של A^{-1}

$$m_A(A)=0\Rightarrow (A-2I)^2(A-3I)=0$$

$$\Rightarrow (A^2-4A+4I)(A-3I)=0$$

$$\Rightarrow A^3-7A^2+16A-12I=0\ /\cdot A^{-3}\Rightarrow I-7(A^{-1})+16(A^{-1})^2-12(A^{-1})^3=0\ /:(-12)$$

$$(A^{-1})^3-\frac{16}{12}(A^{-1})^2+\frac{7}{12}(A^{-1})-\frac{1}{12}I=0$$

כי פ"מ הוא מתוקן

נותר רק לבדוק שאין פולינום מדרגה נמוכה יותר שמאפס את A^{-1}.

נניח בשלילה שיש כזה

$$m_{A^{-1}}(x)=x^2+ax+b$$

$$(A^{-1})^2+aA^{-1}+bI=0\ /\cdot A^2\Rightarrow I+aA+bA^2=0$$

וזו סתירה! לכך שהפ"מ של A הוא מדרגה 3!

לכן בהכרח

$$\boxed{m_{A^{-1}}(x)=x^3-\frac{16}{12}x^2+\frac{7}{12}x-\frac{1}{12}}$$

קפ״ד

⊛ **הערה!** הקשר בין ע״ע של A לע״ע של A^k

$$Av=\lambda v$$

$$\left.\begin{aligned} A^2v &= A\underbrace{\lambda v} \\ &\quad \underbrace{\lambda(Av)} \\ &\quad \lambda(\lambda v)=\lambda^2 v \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A^k v=\lambda^k v$$

⇐ λ ע״ע של A אז λ^k ע״ע של A^k.

(2) יהי V ממ״פ ממימד $1\le n$. יהיו W,U שני ת״מ של V ממימד m $(1\le m\le n)$

נניח כי קיים וקטור $u\in U\setminus\{0\}$ כך ש- $u\in W^\perp$

הוכיחו: כי קיים וקטור $w\in W\setminus\{0\}$ כך ש- $w\in U^\perp$

(כלומר צ״ל $W\cap U^\perp\neq\{0\}$)

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה $W\cap U^\perp=\{0\}$

$$\Rightarrow (W\cap U^\perp)^\perp=\{0\}^\perp \Rightarrow W^\perp+U=V$$

$$\Rightarrow \dim(V)=\dim(W^\perp+U)$$

עפ״ משפט המימדים

$$\Rightarrow \quad n=\underbrace{\dim(W^\perp)}_{n-m}+\underbrace{\dim(U)}_{m}-\underbrace{\dim(W^\perp\cap U)}_{x}$$

$$\Rightarrow \cancel{n}=\cancel{n}-\cancel{m}+\cancel{m}+x \Rightarrow x=0$$

כלומר $\dim(W^\perp\cap U)=0$ ⇐ <u>בסתירה לנתון!</u>

$$\Rightarrow W\cap U^\perp\neq\{0\}$$

(3) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה ולא לכסינה

הוכיחו כי A^{2005} אינה לכסינה.

⊛ למה מעל $\mathbb{R}$ זה לא נכון?

<u>הוכחה:</u> (I) 0 אינו ע״ע של A (כי הפיכה)

מעל $\mathbb{C}$ תמיד מתפרק

(II) ל-A יש צורת ז'ורדן (כי הפ״א שלה מתפרק לגורמים לינאריים)

(III) קיים לפחות בלוק אחד בגודל >1 (כי אין ע״ע 0 וגם היא לא לכסינה)

3

A דומה למטריצת בלוקי ז'ורדן

$$\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \lambda\end{matrix}}_{J_k(\lambda)} \Big\}k & \\ & \ddots \end{pmatrix} \qquad k>1$$

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{בריבוע}} \begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{בשלישי}} \begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & \lambda^3\end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$$

$$\left(J_k(\lambda)\right)^{2005} = \begin{pmatrix}\lambda^{2005} & 2005\lambda^{2004} & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2005\lambda^{2004}\\ 0 & & & \lambda^{2005}\end{pmatrix}$$

בלוק במטריצה ז'ורדן של J^{2005}

נראה שבלוק זה לא לכסין

ע"י שנראה שאין לו מספיק ו"ע בת"ל

$J_k(\lambda)^{2005}$ מדורגת $\Leftarrow$ הפ"א $= (x-\lambda^{2005})^k$

כלומר עבור ע"ע λ^{2005} ר"א $= k$

נמצא ר"ג שלו-

$$\left(J_k(\lambda)-\lambda I\right) = \begin{pmatrix}0 & 2005\lambda^{2004} & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 2005\lambda^{2004}\\ 0 & \dots & & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

יש משתנה חופשי 1

$\Downarrow$

יש ו"ע אחד $\Leftarrow$ ר"ג $= 1$

$\left\{\begin{matrix}\text{ר"ג} = 1\\ \text{וראינו ר"א} = k\end{matrix}\right.$ וכי $k>1$ ולכן ר"ג $\neq$ ר"א $\Leftarrow$ יש בלוק של A ל-מטריצת ז'ורדן לא לכסין ולכן מטריצת ז'ורדן של A לא לכסינה $\Rightarrow$ A דומה למטריצה לא לכסינה $\Rightarrow$ A אינה לכסינה.

* אם היינו מעל $\mathbb{R}$ ל-A לא בהכרח יש צורת ז'ורדן.

4 נתונה

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

מצאו את צורת הז'ורדן של A

4

בקפא

פתרון: $P_A(x)=(x-2)^3(x-1)^2$

	$\lambda=2$	$\lambda=1$
ר"א → סכום סדרי הבלוקים	3	2
ר"ג → מס' הבלוקים	2	1

$$(A-2I)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0\\ 0&2&1&-1&0\\ 1&-1&1&1&-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

משתנים חופשיים לכן 2 וע'

$$(A-I)=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ -1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&2&1&0&0\\ 1&-1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

משתנה חופשי → וע' אחד

לכן צורת ז'ורדן

$$\begin{pmatrix} 2&1&&&\\ 0&2&&&\\ &&2&&\\ &&&1&1\\ &&&0&1 \end{pmatrix}$$

כאן מצאנו בלי להעזר בפ"מ שהיא ד"א

$$m_A(x)=(x-2)^2(x-1)^2$$

(5) נתונה מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ בעלת פ"א ופ"מ הבאים:

$$P_A(x)=(x+3)^4(x-2)^5(x+1)^2x$$

$$m_A(x)=(x+3)^3(x-2)^3(x+1)x$$

א. מצאו את n

ב. נגדיר $V=\ker[(A+3I)^2]$

$$U=\ker[(A-2I)^3]$$

הראו כי המרחבים V,U הם A אינווריאנטים ומצאו מימדם

אם $A\sim B$ יש להם אותו מרחב פתרונות (ker אותו גודל)

ג. נתון $\dim[\ker(A+3I)]=2$, $\dim[\ker(A-2I)]=3$

מצאו את צורת הז'ורדן של A.

V מ"ו. V תוא A אינווריאנטי משמע לכל $v\in V$

$$Av\in V$$

פתרון:

א. $n=12$ (הדרגה של הפ"א)

5

נראה ש- $(A+3I)^2(Av)=0$

$$(A^2+6A+9I)(Av)$$

$$=(A^3+6A^2+9A)v = A(A^2+6A+3I)v =$$

$$= A\underbrace{(A+3I)^2}_{0}v = A\cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

V הוא A אינווריאנטי

$$\ker(A-2I)\sim\begin{pmatrix} 0&1&0&&&&\\ 0&0&1&&&&\\ 0&0&0&&&&\\ &&&0&1&&\\ &&&0&0&&\\ &&&&&\boxed{0}&\\ &&&&&&\boxed{1} \end{pmatrix}$$

מ"ח 1

מ"ח 1

מ"ח 1

$\dim(\ker(A-2I))=3$ נתון

הקבצה

האחדות יקפצו אלכסון

$$\ker(A-2I)^2\sim\begin{pmatrix} 0&0&1&&&&\\ 0&0&0&&&&\\ 0&0&0&&&&\\ &&&0&0&&\\ &&&0&0&&\\ &&&&&\boxed{0}&\\ &&&&&&\boxed{1} \end{pmatrix}$$

פ מ"ח

פ מ"ח

מ"ח אחד

$$\dim(\ker((A-2I)^2))=5$$

מחברה לתרגילים:

עבור V

מה קורה עם הבלוקים של (-3)?

$$\begin{pmatrix} -3&1&&\\ 0&-3&&\\ &&\boxed{-3}&\\ &&&\boxed{-3} \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} -3&1&&\\ 0&-3&&\\ &&-3&1\\ &&0&-3 \end{pmatrix}$$

$\ker(A+3I)$:

$$\begin{pmatrix} 0&1&&\\ 0&0&&\\ &&0&1\\ &&0&0 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 0&1&&\\ 0&0&&\\ &&\boxed{0}&\\ &&&\boxed{0} \end{pmatrix} \Leftarrow$$

2 מ"ח

3 מ"ח

אבל כשנעלה בריבוע

$$\begin{pmatrix} 0&0&&\\ 0&0&&\\ &&0&0\\ &&0&0 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 0&0&&\\ 0&0&&\\ &&\boxed{0}&\\ &&&\boxed{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{בכל מקרה 4 מ"ח} \Rightarrow \dim(\ker(A+3I)^2)=4$$

קס״פ

6 יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $T: V \to V$ אופרטור המקיים $T^4 = T$

א. הוכיחו $V = Im(T^3) + kerT$

ב. האם הסכום בסעיף א הוא סכום ישר?

פתרון:

א. יש להראות שלכל $v \in V$ יש הצגה

$$v = \underset{\in Im(T^3)}{u} + \underset{\in kerT}{w}$$

למשל $u = T^3(v) \in Im T^3$

$w = v - T^3(v)$. האם $w \in kerT$?

כן, $T(w) = T(v - T^3(v)) = \cancel{T(v)} - \underbrace{T^4(v)}_{Tv} = 0$

$$\Rightarrow v = \underset{\in Im T^3}{T^3(v)} + \underset{\in kerT}{(v - T^3(v))}$$

$\boxed{\text{כי } Im T = \{Tv \mid v \in V\} \Rightarrow Im T^3 = \{T^3 v \mid v \in V\}}$

ב. השאלה היא בעצם - האם ההצגה היא יחידה?

$$v = \underbrace{T^3(v)}_{u} + (v - T^3(v))$$

בחרנו $u = T^3(v)$

$\Rightarrow T(u) = T(v)$

האם יתכן שקיים $T(u_1) = T(v)$

אם T אינה חח"ע מתקיים $(T(v) =)\ T(u_1) = T(u_2)$

עבור $u_1 \neq u_2$

ההצגה אינה יחידה ולכן הסכום אינו ישר.

אם T חח"ע ההצגה יחידה ולכן הסכום ישר

לסיכום, לא אפשרי לפסוק, תלוי אם T חח"ע או לא

<u>בונוס</u>

7 יהי V מ״ו מעל $\mathbb{C}$ עם מ״פ.

תהי $T: V\to V$ ה״ל

הוכיחו כי אם $\langle T(v), v\rangle = 0$ לכל $v\in V$ אזי

$T=0$

<u>**הוכחה:**</u> נסתכל על -

(כי ככה מוכיחים קושי שוורץ)

$$\langle \underbrace{T(u+v)}_{Tu+Tv}, u+v\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle Tu, u+v\rangle + \langle Tv, u+v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\langle Tu, u\rangle}}_{\text{ע״פ נתון}=0} + \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle + \underbrace{\cancel{\langle Tv, v\rangle}}_{\text{ע״פ נתון}=0} = 0$$

$$\Rightarrow \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle = 0 \quad \mathrm{I}$$

נעשה אותו דבר עבור $u = iu$ ונקבל

$$\langle T(iu), v\rangle + \langle Tv, iu\rangle = 0$$

$$\Rightarrow i\langle Tu, v\rangle + \underbrace{\bar{i}}_{-i}\langle Tv, u\rangle = 0 \quad /: i$$

$$\Rightarrow \langle Tu, v\rangle - \langle Tv, u\rangle = 0 \quad \mathrm{II}$$

נחבר I, II ונקבל

$$2\langle Tu, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle Tu, v\rangle = 0$$

וזה מתקיים לכל $v\in V$ ולכן בפרט עבור $v = Tu \in V$

$$\Rightarrow \langle Tu, Tu\rangle = 0 \underset{\text{חיוביות}}{\Rightarrow} \text{לכל } u\in V \quad T(u)=0$$

$$\Downarrow$$

$$T=0$$