תרגיל 6 טופולוגיה תשע"ז

1. על $\mathbb{R}$ נגדיר טופולוגיה τ באופן הבא:

$$\tau = \{O \subseteq X | \, |O^c| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$$

זו טופולוגיית הקו-מניה.

(א) הוכיחו שזו אכן טופולוגיה.

(ב) הראו שלכל $A \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים: $scl\left(A\right) = A$.

(ג) מצאו $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $cl\left(A\right) \neq A$.

(ד) האם המרחב מטריזבילי?

2. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו-$A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

(ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

3. נתבונן בשלושת תתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^2$:

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$Y = X \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x-2\right)^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$Z = X \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1\right\}$$

האם X הומיאומורפי ל-Y? האם Y הומיאומורפי ל-Z?

4. הוכיחו שכל מרחב האוסדורף קומפקטי הוא רגולרי, והשתמשו בכך כדי להראות שהוא נורמלי.