תרגיל בית מספר 6

<u>שאלה 1</u> (מבחן תשנ"ה)

א. כתבו נוסחת טיילור בנקודה $(0,0)$ עם שארית Peano לפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$ עד סדר 8. (השתמשו בנוסחת סכום של סדרה הנדסית)

ב. באמצעות סעיף א' מצאו $D^{\alpha}f(0,0)$ עבור $\alpha=(4,4)$

ג. באמצעות סעיף א' מצאו $\frac{\partial^6 f}{\partial y^2 \partial x^4}(0,0)$

<u>שאלה 2</u> (מבחן תשס"ד)

כתבו פיתוח טיילור של $f(x,y)=\sin\left(xe^{y}\right)$ מסדר 2 סביב הנקודה $(x_0,y_0)=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, עם שארית בצורת Peano.

<u>שאלה 3</u>

כתבו פיתוח טיילור (עם שארית Peano) של $g(x,y)=x^2-2yx+y^3$ סביב הנקודה $(1,3)$ עד סדר 2. עשו זאת מבלי לחשב נגזרות חלקיות!

<u>שאלה 4</u>

נתבונן בפונקציה $f(x,y)=e^{x^2y^3}$.

א. כתבו פיתוח טיילור (עם שארית Peano) עד סדר 19 סביב הנקודה $(0,0)$.

ב. באמצעות סעיף א' חשבו את $\frac{\partial^{19} f(0,0)}{\partial x^8 \partial y^{11}}$

שאלה 5

<u>הגדרה</u>: נתבונן בשתי פונקציות $f,g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. נאמר ש- $f(x)=o(g(x))$ כאשר $x\to 0$

אם $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

<u>אצלנו</u>: נציב $g(h)=\|h\|^r$, $f(h)=o(\|h\|^r)$ כאשר $h\to 0$ ואז המשמעות היא ש-

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{\|h\|^r}=0$.

<u>תרגיל</u>:

א. הוכיחו או הפריכו: $g(x)=o(f(x)) \Leftrightarrow f(x)=o(g(x))$ כאשר $x\to 0$.

ב. תהי $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$. הוכיחו: $f(x)=o(g(x)) \Leftrightarrow f(x)=o(\alpha g(x))$

ג. הוכיחו: אם $f(x)=o(|x|^r),\ x\to 0$, $g(y)=o(|y|^m),\ y\to 0$ (עבור $r,m\in\mathbb{N}$), אזי

$$f(x)g(y)=o\left(\|(x,y)\|^{r+m}\right),\ (x,y)\to(0,0)$$

(<u>רמז</u>: השתמשו בבינום של ניוטון על מנת להראות ש- $\left(x^2+y^2\right)^{m+r}\geq x^{2r}y^{2m}$).

שאלה 6

כתבו פיתוח טיילור (עם שארית Peano) עד סדר 2 סביב הנקודה $(0,0)$ לפונקציה $f(x,y)=e^{2x}\ln(1+y)$. עשו זאת תוך שימוש בטורים הידועים מאינפי' 2.

בהצלחה!