חשבון אינפיניטסימאלי 3 – תרגיל בית מס' 2

שאלה 1

תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות. נגדיר: $A+B=\left\{a+b \middle| a\in A, b\in B\right\}$.

<u>תזכורת</u>: ראינו בכיתה כי אם A קבוצה קומפקטית ו- B סגורה, אז $A+B$ קבוצה סגורה.

הוכיחו/הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

א. אם A,B חסומות אז $A+B$ חסומה

ב. אם A,B פתוחות אז $A+B$ פתוחה

ג. אם A,B סגורות אז $A+B$ סגורה

ד. אם A פתוחה ו- B סגורה אז $A+B$ פתוחה

ה. אם A קומפקטית ו- B סגורה אז $A+B$ קומפקטית

ו. אם A,B קומפקטיות אז $A+B$ קומפקטית

שאלה 2

תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות. נגדיר: $\overline{A}=A\cup A'$, כאשר A' היא קבוצת נקודות ההצטברות של A (נקרא לקבוצה הנ"ל הסגור של A).

א. הוכיחו כי אם $A\subseteq B$, אז $\overline{A}\subseteq\overline{B}$. מצאו דוגמא נגדית לכוון השני.

ב. הוכיחו כי הסגור של A הוא הקבוצה הסגורה המינימאלית (ביחס לאיחוד), המכילה את A, כלומר לא קיימת קבוצה סגורה, המוכלת ממש ב$\overline{A}$ ומכילה את A.

שאלה 3

תהי
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(2x-y)^2} & ,\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

א. חשבו את הגבולות החוזרים $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$.

ב. חשבו את הגבול (או הוכיחו כי אינו קיים) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

שאלה 4

האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$?

א.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ב. $$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} & , \quad \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & , \quad \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

ג. עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי m הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+4y^2} & , \quad \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & , \quad \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

תהיה רציפה בראשית הצירים?

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות (אין קשר בין הסעיפים):

א. אם $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=0$ אזי גם $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f\left(x,y\right)=0$.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ולא קבועה. נגדיר פונקציה חדשה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $g\left(x,y\right)=\begin{cases}f\left(\dfrac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}\right) & , \quad \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & , \quad \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$. אזי $g\left(x,y\right)$ רציפה בראשית הצירים.

ג. תהי $f\left(x,y\right)$ רציפה בכל המישור. נגדיר פונקציה חדשה $g\left(x,y\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{\sqrt{\left(x-y\right)^2-1}}$.
נתון: $g\left(10,1\right)>0$, $g\left(1,10\right)<0$. אזי בתחום ההגדרה הטבעי של $g\left(x,y\right)$ קיימת נקודה, שבה היא מתאפסת.

ד. אם לכל $\left(x,y\right)$ מתקיים: $\left|f\left(x,y\right)\right|\le\sin^2\left(x^2+y^2\right)$, אזי $f\left(x,y\right)$ רציפה בראשית הצירים.

ה. אם לכל y מתקיים: $\left|f\left(a,y\right)-f\left(b,y\right)\right|\le\left|a-b\right|$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$ ולכל x מתקיים: $\left|f\left(x,c\right)-f\left(x,d\right)\right|\le\left|c-d\right|$ לכל $c,d\in\mathbb{R}$, אזי $f\left(x,y\right)$ רציפה בכל המישור.

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו כי $\left\|\bullet\right\|_2:\mathbb{R}^n\to\left[0,\infty\right)$ (הנורמה האוקלידית הרגילה) היא פונקציה רציפה.