83-110 אלגברה לינארית להנדסה – פתרון מועד ב' תשפ"ב – 28/02/22

מרצים: פרופ' אליהו מצרי, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.
- מומלץ לקרוא ראשית את כל השאלות, הן לא מסודרות לפי רמת קושי
- יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.
- כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהיינה מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (עם m שורות וn עמודות).

<u>הוכיחו או הפריכו</u> את הטענות הבאות:

א. אם קיים $b\in\mathbb{R}^n$ כך שלא קיים פתרון למשוואה $Av=b$, אז $\dim\left(N(A)\right)\neq 0$.

<u>הערה</u>: בשאלה זו נפלה טעות - התכוונו לרשום $b\in\mathbb{R}^m$.

קיבלנו את התשובות של מי שפספס את הטעות הזו וענה על השאלה כאילו נתון $b\in\mathbb{R}^m$, וכן של מי שענה על השאלה כלשונה והניח כי אכן $b\in\mathbb{R}^n$.

<u>בהנחה ש $b\in\mathbb{R}^m$:</u>

נביט במטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ובוקטור $b=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\neq b$$

אך מצד שני $\dim N(A)=0$ ולכן הפרכנו את הטענה.

<u>בהנחה ש $b\in\mathbb{R}^n$:</u>

עם אותה הA שבחרנו קודם גם לוקטור $b=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ אין פתרון למשוואה $Av=b$, (אמנם זה כי הגדלים לא מסתדרים בכלל). מכל מקום, הפרכנו גם את גרסא זו של הטענה.

ב. $\dim(N(A+B))\geq\dim N(A)+\dim N(B)$.

טענה זו אינה קרובה להיות נכונה. נפריך עם הדוגמא הפשוטה הבאה:

נבחר את שתי המטריצות להיות מטריצת האפס $A=B=0\in\mathbb{R}^{2\times 2}$

כעת

$$\dim N(A)=\dim N(B)=\dim N(A+B)=2$$

אך מצד שני זה לא נכון ש $2\geq 2+2$.

ג. אם $\dim R(B^tA)=n$ וכן $\dim C(AB^t)=m$ אזי A,B ריבועיות.

ידוע לנו כי

$$rank(AB)\le rank(A),rank(B)$$

וכמו כן אם $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ אז

$$rank(A)\le m,n$$

סה"כ ביחד נקבל כי

$$n=rank(B^tA)\le rank(A)\le m$$

$$m=rank(AB^t)\le rank(A)\le n$$

וביחד $n=m$ ולכן המטריצות אכן ריבועיות.

2. תהי מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, ויהי $v\in\mathbb{R}^n$, עבור $n>1$.

א. יהי $1\le k<n$. הוכיחו כי אם $A^kv=0$ ואילו $A^{k-1}v\ne 0$ אזי הוקטורים הבאים בת"ל:

$$v,Av,A^2v,\dots,A^{k-1}v$$

(רמז: אפשר לכפול בA.)

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$a_1v+a_2Av+\cdots+a_kA^{k-1}v=0$$

ונוכיח שכל הסקלרים הם אפס.

נכפול את שני צדי המשוואה במטריצה A מצד שמאל ונקבל

$$a_1Av+\cdots+a_kA^kv=0$$

אך נתון כי $A^kv=0$ ולכן בעצם

$$a_1Av+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}v=0$$

נחזור על הפעולה עד שנגיע למשוואה

$$a_1A^{k-1}v=0$$

כיוון ש $A^{k-1}v\ne 0$ נובע כי $a_1=0$.

נציב זאת בצירוף הלינארי המקורי ונקבל

$$a_2Av+\cdots+a_kA^{k-1}v=0$$

באופן דומה נקבל כי $a_2=0$, נציב חזרה בצירוף הלינארי המקורי וכך הלאה נגלה כי כל הסקלרים הם אפס.

הערה: הוכחה מדוייקת יש לרשום באינדוקציה, אך קיבלנו תשובות כאלה במבחן. למרות זאת אכתוב את ההוכחה באינדוקציה (ואז תבינו למה לא דרשנו אותה):

בסיס האינדוקציה: $A^{k-1}v$ לבדו הוא בת"ל. כיוון ש $A^{k-1}v\ne 0$ אכן הקבוצה $\{A^{k-1}v\}$ היא בת"ל.

צעד האינדוקציה: יהי $p<k-1$ עבורו $A^{k-1-p}v,\dots,A^{k-1}v$ בת"ל, ונוכיח כי $A^{k-1-p-1}v,\dots,A^{k-1}v$ בת"ל

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$a_{p+1}A^{k-p-2}v + \cdots + a_1A^{k-1}v = 0$$

נכפול בA ונקבל כי

$$a_{p+1}A^{k-p-1} + \cdots + a_2A^{k-1}v + a_1A^kv = 0$$

ולכן

$$a_{p+1}A^{k-p-1} + \cdots + a_2A^{k-1}v = 0$$

ולפי הנחת האינדוקציה זה צירוף לינארי מתאפס של וקטורים בת"ל ולכן הסקלרים $a_{p+1}, \dots, a_2$ שווים אפס

נציב בצירוף הלינארי המקורי ונקבל כי

$$a_1A^{k-1}v = 0$$

ושוב בדומה לבסיס האינדוקציה נקבל כי $a_1 = 0$ וסה"כ כל הסקלרים $a_1, \dots, a_{p+1}$ מתאפסים וסיימנו.

ב. נניח כי הוקטורים $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$ שונים זה מזה ובת"ל. הוכיחו או הפריכו: $A^nv = 0$.

הפרכה:

נבחר $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ואכן

$$\{v, A^{2-1}v\} = \{(1,0), (0,1)\}$$

שונים זה מזה ובת"ל, אך

$$A^2 = I$$

ולכן

$$A^2v = v \neq 0$$

ג. נניח כי $A^nv = A^{n-1}v$. הוכיחו או הפריכו: $\det(I - A) = 0$.

הפרכה פשוטה אם A היא מטריצת האפס, או v הוא וקטור האפס.

נתפרע לחלוטין ונבחר את A להיות מטריצה האפס מגודל 2×2 וכן את v להיות וקטור האפס $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ברור כי

$$A^{2-1}v = A^2v = 0$$

לעומת זאת,

$$\det(I - A) = \det(I) = 1 \neq 0$$

הערה: ההטעייה בסעיף זה (שלצערי רבים נפלו בה) הוא התהליך הבא:

$$A^{n-1}v - A^n v = 0$$

$$A^{n-1}(I - A)v = 0$$

עד כאן הכל נכון.

כעת אם היה נתון כי $v \neq 0$ ניתן להסיק כי $A^{n-1}(I - A)$ אינה הפיכה ולכן הדטרמיננטה שלה היא אפס. אבל אי אפשר להסיק מכך שדווקא $\det(I - A) = 0$ שהרי ייתכן כי $\det(A) = 0$.

אבל אפילו לא נתון כי $v \neq 0$.

3. תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיס ל $C(A) \cap N(A)$.

ראשית נשים לב כי

$$N(A) = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 2x + 7y + z = 0 \\ -x - 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

כלומר מרחב זה נתון לנו באופן אלגברי על ידי משוואות מאפיינות.

נעביר גם את מרחב העמודות לצורה אלגברית

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & | & x \\ -1 & -3 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & 1 & | & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & x + 2y \\ -1 & -3 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & 1 & | & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & 1 & | & x + 2y \\ 0 & 0 & 0 & | & z - x - 2y \end{pmatrix}$$

כלומר

$$C(A) = \{(x,y,z) | -x - 2y + z = 0\}$$

סה"כ החיתוך הוא

$$C(A) \cap N(A) = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 2x + 7y + z = 0 \\ -x - 3y = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{matrix} \right\}$$

ונותר לנו למצוא את הפתרון הכללי למערכת המשוואות הזו.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $z = t$ ולכן $y = -t$ וכן $x = 3t$

ומכאן הפתרון הכללי הוא $(3t, -t, t)$ ולכן הבסיס לחיתוך הוא $\{(3,-1,1)\}$

ב. מצאו בסיס ל $R(A) \cap N(A)$.

ראשית נעביר את מרחב השורות לצורה אלגברית:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & x \\ 7 & -3 & 1 & | & y \\ 1 & 0 & 1 & | & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & | & x-2z \\ 0 & -3 & -6 & | & y-7z \\ 1 & 0 & 1 & | & z \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & z \\ 0 & -1 & -2 & | & x-2z \\ 0 & 0 & 0 & | & y-7z-3(x-2z) \end{pmatrix}$$

כלומר

$$R(A) = \{(x,y,z) | -3x+y-z=0\}$$

(אגב, בשלב זה אפשר להציב שורות מהמטריצה במשוואה לראות אם היא מתקיימת. זה לא אומר שבטוח לא עשינו טעות חישוב, אבל לפעמים זה חושף טעויות בשלב זה.)

כעת החיתוך הוא

$$R(A) \cap N(A) = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 2x+7y+z=0 \\ -x-3y=0 \\ y+z=0 \\ -3x+y-z=0 \end{matrix} \right\}$$

נמצא את הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר הפתרון היחיד הוא $(0,0,0)$ ולכן הבסיס לחיתוך הוא הקבוצה הריקה.

העשרה: למעשה, ניתן להוכיח כי לכל מטריצה ממשית החיתוך בין מרחב השורות למרחב הפתרונות הוא רק וקטור האפס. זה מכיוון שמרחב הפתרונות מאונך למרחב השורות (במכפלה הפנימית הסטנדרטית).

ג. האם A לכסינה? הוכיחו את תשובתכם.

ראשית נחשב את הפולינום האופייני של A

$$P_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -7 & -1 \\ 1 & x+3 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -7-(x-2)(x+3) & -1 \\ 1 & x+3 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה ונקבל כי

$$P_A(x) = -\det\begin{pmatrix} -x^2-x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)(x^2+x+1)+1 = x^3-1+1 = x^3$$

כלומר הערך העצמי היחיד של המטריצה הוא $x=0$.

כעת צריך למצוא את מימד המרחב העצמי של הע"ע אפס, וזה בדיוק מימד מרחב הפתרונות של המטריצה.

בסעיפים קודמים דירגנו את A וראינו כי הדרגה שלה היא 2 ולכן מימד מרחב הפתרונות שלה הוא 1.

כלומר יש בבסיס ו"ע אחד המתאים לע"ע אפס, ולא שלושה, ולכן המטריצה <u>אינה</u> לכסינה.

4. נביט במרחב $V=\mathbb{C}^3$ מעל שדה המרוכבים עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle v,w\rangle = v^t\overline{w}$ והנורמה המושרית. כמו כן, נביט בתת המרחב $U = span\{(1,i,1+i),(0,1-i,0)\}$

א. מצאו בסיס א"נ ל-U.

נסמן

$$v_1 = (0,1-i,0)$$

$$v_2 = (1,i,1+i)$$

נפעיל את אלגוריתם גרם שמידט

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1$$

נבצע את החישובים בצד, ואז נרכיב מהם את התשובה

$$\langle v_2,w_1\rangle = \langle (1,i,1+i),(0,1-i,0)\rangle = i\cdot(1+i) = -1+i$$

$$\langle w_1,w_1\rangle = \langle (0,1-i,0),(0,1-i,0)\rangle = (1-i)(1+i) = 2$$

לכן סה"כ

$$w_2 = (1,i,1+i) - \frac{-1+i}{2}(0,1-i,0) = \left(1, i-\frac{1}{2}(-1+i)(1-i), 1+i\right) =$$

$$= \left(1, i - \frac{1}{2}(-1+1+i+i), 1+i\right) = (1,0,1+i)$$

הערה: מומלץ בשלב זה לוודא כי אכן $w_2 \perp w_1$ ואכן

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle (0,1-i,0), (1,0,1+i) \rangle = 0$$

לבסוף, עלינו לנרמל את הוקטורים. לצורך זה נמצא את הנורמות שלהם.

כבר חישבו כי

$$||w_1|| = \sqrt{2}$$

וכעת

$$||w_2|| = \sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle} = \sqrt{\langle (1,0,1+i), (1,0,1+i) \rangle} = \sqrt{1+0+2} = \sqrt{3}$$

ולכן סה"כ הבסיס הא"נ הוא

$$U = span\left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

ב. השלימו את הבסיס שמצאתם בסעיף א' לבסיס א"נ לV.

לצורך הנוחות החישובית נשלים את הבסיס לפני הנרמול, נעשה גרם שמידט, ולבסוף ננרמל.

$$U = span\{(0,1-i,0), (1,0,1+i)\}$$

קל לנחש ולוודא כי הוקטור $(0,0,1)$ אינו שייך לU ולכן אם נוסיף אותו לבסיס נקבל קבוצה בת"ל בגודל 3 ולפי השלישי חינם היא תהווה בסיס לכל V.

אפשר לדלג על ההוכחה שהוא אכן אינו תלוי בקודמיו, כי בתהליך גרם שמידט אם היינו בוחרים וקטור שתלוי בקודמיו הוא היה מתאפס כאשר היינו מחסירים את ההיטלים שלו על קודמיו.

מי שרואים בזה התחכמות מיותרת יכולים לדרג מטריצה ולהראות שאכן ההשלמה לבסיס תקינה.

סה"כ הוקטור השלישי הוא

$$v_3 = (0,0,1)$$

ולפי גרם שמידט נקבל

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

נשלים בצד את החישובים החסרים:

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \langle (0,0,1), (0,1-i,0) \rangle = 0$$

ייאי! משהו התאפס ונעלם!

$$\langle v_3, w_2 \rangle = \langle (0,0,1), (1,0,1+i) \rangle = 1-i$$

ולכן סה"כ

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{1-i}{3}(1,0,1+i) = (0,0,1) - \left(\frac{1-i}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{-1+i}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(-1+i, 0, 1)$$

אפשר לכפול ב3 ולקבל וקטור באותו כיוון (הרי ממילא ננרמל בהמשך) ולקבל את ההשלמה לבסיס א"ג:

$$V = span\{(0,1-i,0),(1,0,1+i),(-1+i,0,1)\}$$

הערה: שוב כדאי לבדוק בשלב זה כי הוקטור שקיבלנו אכן מאונך לקודמיו. זה באמת מתקיים...

לבסוף ננרמל ונקבל את ההשלמה הא"נ:

$$V = span\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1-i,0),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1+i),\frac{1}{\sqrt{3}}\ (-1+i,0,1)\right\}$$

ג. מצאו את כל ערכי $z \in \mathbb{C}$ עבורם $(2,z,z^2) \in U$

נעזר בבסיס הא"ג מסעיף א'. אמנם זה לא הכרחי אבל יחסוך איזו פעולת דירוג אחת.

בעצם השאלה היא לאילו ערכי z יש פתרון למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 \\ 1-i & 0 & | & z \\ 0 & 1+i & | & z^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-i & 0 & | & z \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & z^2-2(1+i) \end{pmatrix}$$

יהיה פתרון אם ורק אם

$$z^2 = 2(1+i) = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ולכן הפתרונות הם

$$z_k = 2^{\frac{3}{4}}cis\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right), k = 0,1$$

$$z_0 = 2^{\frac{3}{4}}cis\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_1 = 2^{\frac{3}{4}}cis\left(\frac{9\pi}{8}\right)$$

5. תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י

$$T(x,y,z,w)=(x,x+z,y+w)$$

ונביט בתת המרחב

$$U=span\{(1,0,-1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

א. מצאו בסיס ל-$\ker(T)$.

$$\ker T=\{(x,y,z,w)|T(x,y,z,w)=0\}=\left\{(x,y,z,w)\middle|\begin{matrix}x=0\\x+z=0\\y+w=0\end{matrix}\right\}$$

נמצא פתרון למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

נסמן $w=t$ ונקבל את הפתרון הכללי

$$(0,-t,0,t)$$

ולכן הבסיס לגרעין הוא $\{(0,-1,0,1)\}$

ב. יהי וקטור $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ מצאו וקטור $u\in U$ כך ש $Tu=v$,

הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a,b,c.

ניקח וקטור כללי בU:

$$u=x_1(1,0,-1,0)+x_2(0,0,1,0)+x_3(0,0,0,1)=(x_1,0,-x_1+x_2,x_3)$$

ודורשים בשאלה כי

$$Tu=(a,b,c)$$

כעת

$$Tu=T(x_1,0,-x_1+x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)$$

ולכן יוצא כי

$$x_1=a$$

$$x_2=b$$

$$x_3=c$$

לכן סה"כ

$$u=(a,0,-a+b,c)$$

ג. מצאו שני וקטורים $u_1\neq u_2\in U$ כך ש $Tu_1=Tu_2$ או הוכיחו שאין זוג וקטורים כאלה.

אין זוג כזה. הרי בסעיף ב' הוכחנו שלכל וקטור $v\in\mathbb{R}^3$ קיים וקטור <u>יחיד</u> $u\in U$ עבורו $Tu=v$

(לקחנו וקטור כללי בu ומצאנו פתרון יחיד למשוואה).

הערה: אפשר גם לקחת שני וקטורים כלליים בU ולהוכיח שזה בלתי אפשרי.