אינפי 3 תרגיל 1

1) הוכיחו את "אי שיוויון המשולש השני" במרחב נורמי - $|(\|u\| - \|v\|)| \le \|u \pm v\|$
הסיקו שאם סדרת וקטורים $\{u_n\}$ מקיימת $\|u_n - u\| \to 0$ אז היא מקיימת $\|u_n\| \to \|u\|$.

2) יהי V ממ"פ, ותהי $\{x_1, \dots, x_n\}$ קבוצה אורתונורמלית. יהי $x \in V$ כלשהו. הוכיחו שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

3) יהיו $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ מרחבים נורמיים, מי מהפונקציות הבאות היא נורמה על $X \times Y$? **הוכיחו!** החיבור והכפל בסקלר ב- $X \times Y$ מוגדרים איבר-איבר.

א. $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

ב. $\|(x, y)\|_2 = \|x\|_X \|y\|_Y$.

ג. $\|(x, y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$.

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$: $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$

ב. במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2)$$

זכרו שבמרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ מתקיים $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ ו- $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ ובמרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ מתקיים $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C}$ ו- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.

5) הוכיחו שאם מרחב מכפלה פנימית $(V, \|\cdot\|)$ מעל $\mathbb{R}$ מקיים את אי שיוויון המקבילית:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

אז הפונקציה $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ היא מכפלה פנימית מעל V שמשרה את הנורמה $\|\cdot\|$.

הדרכה: יש צורך להוכיח את אקסיומות המכפלה הפנימית, וש- $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. הדבר היחיד שיש להוכיח ואינו מיידי הוא ליניאריות במשתנה הראשון

$$\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle$$

הוכיחו זאת בשני חלקים.
קודם הוכיחו אדטיביות - הוכיחו $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$. מה ששקול לשיוויון

$$\|u-w\|^2 + \|v-w\|^2 - \|u+v-w\|^2$$
$$= \|u+w\|^2 + \|v+w\|^2 - \|u+v+w\|^2$$

לפי אי שיוויון המקבילית

$$\|u \pm w\|^2 + \|v \pm w\|^2 = \frac{1}{2}(\|u + v \pm 2w\|^2 + \|u - v\|^2)$$

שימוש בשיוויון הזה עבור "+" ועבור "-", וצימצום, יצמצם את המשוואה ל-

$$\frac{1}{2}\|u + v - 2w\|^2 - \|u + v - w\|^2 = \frac{1}{2}\|u + v + 2w\|^2 - \|u + v + w\|^2$$

שימוש נוסף באי שיוויון המקבילית ייתן:

$$\frac{1}{2}\|u + v \pm 2w\|^2 - \|u + v \pm w\|^2 = \|\pm w\|^2 - \frac{1}{2}\|u + v\|^2$$

ואז ניתן לצמצם את הביטוי ל- $0 = 0$.

אחר כך, יש להוכיח כפל מולטיפלטיביות - להוכיח $\langle au, w\rangle = a\langle u, w\rangle$.
זה נעשה בשלבים.

א) למספרים הטבעיים $a \in \mathbb{N}$ ניתן להוכיח זאת באינדוקציה.

ב) עבור $a = 0$ זה נובע מיידית מאדיטיביות.

ג) עבור $-a$, כאשר $a \in \mathbb{N}$, זה נובע מיידית מאדטיביות ומסעיפים א) ו- ב).
וככה מוכיחים זאת לכל $a \in \mathbb{Z}$

ד) עבור $a = \frac{n}{m}$ מספר רציונאלי זה נובע בקלות מהסעיפים הקודמים, וככה מוכיחים זאת לכל $a \in \mathbb{Q}$

ה) עבור $a \in \mathbb{R}$ כללי לוקחים סדרה $\{a_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ ששואפת ל- a.
השתמשו בכך ש- $\|(a - a_n)u\| = |a - a_n|\|u\| \to 0$ ובשאלה 1
משתמשים בה כדי להוכיח ש- $\|au \pm v\| \to \|a_n u \pm v\|$ ולכן $\langle a_n u, w\rangle \to$
$\langle au, w\rangle$ (העזרו בשאלה 1)
בגלל ש- a_n רציונליים מתקיים $\langle a_n u, w\rangle = a_n\langle u, w\rangle \to a\langle u, w\rangle$ והשיוויון נובע מיחידות בגבול.