הרצאה 24

יהי F שדה, <u>הערכה</u> הינה פונקציה
$F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ שמקיימת:

1) $|a|=0$ אם ורק אם $a=0$.

2) $|ab| = |a|\cdot|b|$ לכל $a,b\in F$.

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ לכל $a,b\in F$.

<u>דוגמאות</u> 1) $F=\mathbb{R}$ (או $\mathbb{Q}$) עם הערך המוחלט הרגיל.

2) $F=\mathbb{C}$ $\quad |z| = z\bar{z}$.

3) F שדה כלשהו, $|a| = \begin{cases} 0, & a=0 \\ 1, & a\neq 0 \end{cases}$

ההערכה הטריוויאלית.

4) F' שדה כלשהו, $F=F'((x))$ טורי לורן.

$$F = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n : \begin{array}{l} a_n \in F' \\ a_n = 0 \text{ קיים } N \text{ כך ש- } \\ \text{לכל } n<N \end{array} \right\}$$

$$\left| f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n \right| = 613^{-\deg f}$$

$$\deg f = \min\{n : a_n \neq 0\}$$

5) $F=\mathbb{Q}$ $\quad p$ ראשוני. יהי $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$,

יהי $a=\frac{m}{n}$ שבר.

$m=p^b m'$ $\quad p\nmid m'$

$n=p^c n'$ $\quad p\nmid n'$ $\quad\Leftarrow\quad$ $a=p^{b-c}\frac{m'}{n'}$

נגדיר
$$|a|_p=\begin{cases}\frac{1}{p^{b-c}}, & a\neq 0\\ 0, & a=0\end{cases}$$

p-adic

נקראת הנורמה ה-p-אדית. צריך לבדוק שזו אכן הנורמה. תכונות 1), 2) ברורות.

צריך לבדוק 3). יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

נניח $|\alpha|=\frac{1}{p^{d_1}}$ $\quad |\beta|=\frac{1}{p^{d_2}}$.

נניח $d_1\le d_2$. אזי $p\nmid m'n'$ $\quad \alpha=p^{d_1}\frac{m'}{n'}$

$\beta=p^{d_2}\frac{m''}{n''}$ $\quad p\nmid m'n'$

$$\alpha+\beta=p^{d_1}\left(\frac{m'}{n'}+\frac{\overbrace{p^{d_2-d_1}}^{\mathbb{Z}}m''}{n''}\right)=$$

$$p^{d_1}\underbrace{\left(\frac{p^{d_2-d_1}m''n'+m'n''}{n'n''}\right)}_{|\cdot|_p\le 1}$$

לכן $|\alpha|_p+|\beta|_p \geq \max\{|\alpha|_p, |\beta|_p\} = \frac{1}{p^{d_1}} = |p^{d_1}| \geq |\alpha+\beta|_p$:

<u>הגדרה</u> הערכה נקראת לא-ארכימדית אם היא מקיימת את אי-שוויון המשולש החזק:

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$$

הוכחנו כי $|\cdot|_p$ על $\mathbb{Q}$ הינה לא-ארכימדית.
ההערכה הטריוויאלית והדוגמא 4) גם לא ארכימדיות.

<u>הגדרה</u> יהי F שדה עם הערכה $|\cdot|$. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n \in F)$ נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n \geq N$ מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

<u>טענה</u> הקבוצה של כל סדרות קושי הינה חוג

$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\}$$

$$\{a_n\}\cdot\{b_m\} = \{a_nb_n\}$$

<u>הגדרה</u> F שדה עם הערכה $|\cdot|$. סדרת קושי $\{a_n\}$ נקראת <u>אפסה</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך

שלכל $N\leq n$ מתקיים $|a_n|<\varepsilon$.

<u>טענה</u> יהי F שדה עם הערכה. יהי R החוג של סדרות קושי. יהי $\{\text{סדרות אפסות}\}=I$. אזי $I\triangleleft R$ אידיאל מקסימלי.

<u>הוכחה</u> לבדוק כי $I\triangleleft R$ אידיאל הוכח באינפי 1. אנחנו נוכיח כי $I\triangleleft R$ הינו האידיאל המקסימלי היחיד. לפי השיעור הקודם, מספיק להוכיח

$I=\{r\in R: \text{r לא הפיך}\}$

אז יהי $\{a_n\}$ סדרת קושי לא אפסית. אז קיים $\varepsilon'>0$ כך שקיימים n גדולים כרצוננו כך ש-$|a_n|\geq\varepsilon'$. אם $\{a_n\}$ קושי, אזי עבור n,m גדולים, $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon'}{2}$, זה אומר שעבור n גדול, $|a_n|>\frac{\varepsilon'}{2}$. לכן ניתן להגדיר את הסדרה $\{\frac{1}{a_n}\}$.

<u>הגדרה</u> יהי F שדה עם הערכה $|\cdot|$. נגדיר R,I כנ"ל. ההשלמה של F ביחס ל-$|\cdot|$

הינה $\hat{F} = R/I$ (זה שדה כי I מקסימלי)

הרעיון: האיברים של $\hat{F}$ הם כל הגבולות האפשריים של סדרות קושי עם איברים ב-F.

<u>תרגיל</u> אם $\{a_n\}$ סדרת קושי, אזי $\{|a_n|\}$ הינה סדרה מתכנסת של מספרים ממשיים.

נגדיר הערכה על $\hat{F}$: יהי $a \in \hat{F}$.

יהי $\{a_n\} \in R$ סדרת קושי שמייצגת את a.

נגדיר $|a| = \lim_{n\to\infty} |a_n|$.

<u>תרגיל</u> הפונקציה הנ"ל מוגדרת היטב והיא אכן הערכה על $\hat{F}$. יותר מזה, $\hat{F}$ שלם עבור ההערכה הנ"ל (לכל סדרת קושי יש גבול ב-$\hat{F}$).

<u>אבחנה</u>

$$F \hookrightarrow \hat{F}$$
$$\alpha \mapsto [(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha,\dots)]$$

<u>הערה</u> אם נפעל את תהליך ההשלמה אם $F=\mathbb{Q}$, $|\cdot|$ הערך המוחלט הרגיל, אזי $\hat{F}=\mathbb{R}$.

הגדרה השדה $\mathbb{Q}_p$ של המספרים ה-p-אדיים הינו ההשלמה של $\mathbb{Q}$ עבור ה-p ההערכה ה-p אדית.

דוגמא ביחס להערכה ה-p-אדית

$p, p^2, p^3, p^4, p^5, \dots$ אפיסה

$$|p^n| = \frac{1}{p^n} \to 0$$

מצד שני, אם $q \neq p$ ראשוני, אזי

$q, q^2, q^3, \dots$

לא סדרת קושי.

טענה יהי R תחום שלמות. יהי F שדה השברים, $F = \mathrm{Frac}\, R$. הטענות הבאות שקולות.

א) יהי $0 \neq \alpha \in F$. אזי $\alpha \in R$ או $\alpha^{-1} \in R$.

ב) יהיו $I, J \trianglelefteq R$ אידיאלים. אזי $I \subseteq J$ או $J \subseteq I$.

ג) יהיו $I, J \trianglelefteq R$ אידיאלים ראשיים. אזי $I \subseteq J$ או $J \subseteq I$.

הוכחה ב) $\Rightarrow$ ג) ברור.

א) ⇐ ב) נניח כי לא מתקיים. יהיו

$I, J \trianglelefteq R$ שני אידיאלים. נניח בשלילה

כי $I \not\subseteq J$, $J \not\subseteq I$. אז קיימים

איברים $a \in I \setminus J$, $b \in J \setminus I$. בפרט, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

יהי $\alpha = \frac{a}{b} \in F$. אם $\alpha \in R$, אזי

$a = \underbrace{\frac{a}{b}}_{\in R} \cdot \underbrace{b}_{\in J} \in J$ בסתירה, כי הנחנו $a \notin J$.

אחרת $\alpha^{-1} = \frac{b}{a} \in R$, אז $b = \alpha^{-1} a \in I$,

שוב בסתירה.

<u>ב) ⇐ א)</u> יהי $\alpha \in F \setminus \{0\}$. אזי $\alpha = \frac{a}{b}$,

$a, b \in R \setminus \{0\}$. יהי $I = (a)$, $J = (b)$. לפי הנתון ב),

$I \subseteq J$ או $J \subseteq I$

אם $I \subseteq J$, אזי $a \in (b)$, לכן $a = br$, $r \in R$.

אזי $\alpha = \frac{a}{b} = r \in R$.

אם $J \subseteq I$, אזי $b \in (a)$ ⇐ $\alpha^{-1} = \frac{b}{a} \in R$.

<u>הגדרה</u> יהי R תחום שלמות. R נקרא חוג הערכה אם הוא מקיים את התנאים השקולים של הטענה הקודמת.

<u>טענה</u> יהי F שדה עם הערכה לא-ארכימדית $|\cdot|$. אזי

$$R = \{\alpha \in F : |\alpha| \le 1\}$$

הינו חוג הערכה עם $F = \mathrm{Frac}\, R$.

<u>הוכחה</u> כמובן, $|1_F| = 1$ בגלל הכפליות של $|\cdot|$. $1 \in R$, R סגור לכפל כי

$$a,b \in R \Rightarrow |a+b| \le \max\{|a|,|b|\} \le 1 \Rightarrow a+b \in R.$$

$$a,b \in R \Rightarrow |ab| = |a|\cdot|b| \le 1 \Rightarrow ab \in R.$$

לכן R חוג. יהי $\alpha \in F$. אם $|\alpha| \le 1$, אזי $\alpha \in R$. אם $|\alpha| > 1$, אזי $1 > \frac{1}{|\alpha|} = |\frac{1}{\alpha}|$, ואז $\alpha^{-1} \in R$. לכן R אכן חוג הערכה.

<u>טענה</u> כל חוג הערכה הינו חוג מקומי.

<u>הוכחה</u> יהיו I, J אידיאלים מקסימליים. אזי $I \subseteq J$ או $J \subseteq I$ $\Rightarrow$ $I = J$.

טענה יהי F שדה עם הערכה לא-ארכימדית
ו.ו, יהי $R=\{\alpha\in F: |\alpha|\le 1\}$.

אזי R הינו חוג מקומי,
$I=\{\alpha\in F: |\alpha|<1\}$
הינו האידיאל המקסימלי היחיד, ואיבר $r\in R$ הפיך
אם ורק אם $|r|=1$.

הוכחה אם $|r|=1$, אזי $|\frac{1}{r}|=\frac{1}{1}=1$. לכן $\frac{1}{r}\in R$,
לכן r הפיך. מצד שני,
$I=\{\alpha\in F: |\alpha|<1\}\triangleleft R$. אכן

$$a,b\in I \Rightarrow |a+b|\le \max\{|a|,|b|\}<1 \Rightarrow a+b\in I$$

$$\begin{matrix} a\in I \\ r\in R \end{matrix} \Rightarrow |ar|=\underbrace{|a|}_{<1}\cdot\underbrace{|r|}_{\le 1}<1 \quad ar\in I.$$

לכן $I=\{r\in R: \text{r לא הפיך}\}$ ולכן הוא
האידיאל המקסימלי היחיד של R.

טענה יהי F שדה עם הערכה לא
ארכימדית. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור $(a_n\in F)$.
אזי הסדרה של הסכומים החלקיים הינה

טור קושי אם ורק אם $a_n \to 0$

(כלומר $\{a_n\}$ אפיסה).

<u>הערה</u> זה לא נכון עבור הערכות ארכימדיות.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (עם ההערכה הרגילה על $\mathbb{R}$)

מתבדר.

<u>הוכחה</u> $\Leftarrow$) כמו באינפי.

$\Rightarrow$) נניח $\{a_n\}$ אפיסה.

תהי $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

הסדרה של סכומים חלקיים.

יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים N כך ש-

$|a_n| < \varepsilon$ לכל $n \geq N$. ואז לכל

$N \leq n < m$,

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq$$

$$\max\{|a_{n+1}|, \ldots, |a_m|\} < \varepsilon.$$