מתמטיקה בדידה – תרגיל 8

שימו לב: יש לכם שבועיים לתרגיל הזה ☺

שאלה 0

תהי $f: A \to B$ פונקציה ונניח $C_1, C_2 \subseteq A$ ו-$D_1, D_2 \subseteq B$. הוכיחו או הפריכו:

א. $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$
ב. $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$
ג. $f\left(C_1^C\right) = f(C_1)^C$ (עבור $X \subseteq A$, $X^C = A \setminus X$ ועבור $Y \subseteq B$, $Y^C = B \setminus Y$)
ד. $f^{-1}\left(D_1^C\right) = f^{-1}(D_1)^C$
ה. $f(C_1 \setminus C_2) = f(C_1) \setminus f(C_2)$
ו. $f^{-1}(D_1 \setminus D_2) = f^{-1}(D_1) \setminus f^{-1}(D_2)$

פיתרון

א. הוכחה:

$$x \in f^{-1}\left[D_1 \cup D_2\right] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \cup D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \vee f(x) \in D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \vee x \in f^{-1}\left[D_2\right] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \cup f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות. (הערה הסימון $\leftrightarrow$ אומר אם"ם ואינו חלק מהפסוקים.)

ב. הוכחה:

$$x \in f^{-1}\left[D_1 \cap D_2\right] \leftrightarrow f(x) \in D_1 \cap D_2 \leftrightarrow f(x) \in D_1 \wedge f(x) \in D_2 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \wedge x \in f^{-1}\left[D_2\right] \leftrightarrow x \in f^{-1}\left[D_1\right] \cap f^{-1}\left[D_2\right]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

ג. דוגמא נגדית:

נניח ש $X = \{1,2\}, Y = \{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f: X \to Y$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים $f(x) = x$ נגדיר $C_1 = \{1\}$ ואז $C_1^C = \{2\}$. אזי $f\left(C_1^C\right) = \{2\} \neq \{2,3\} = \left(f(C_1)\right)^C$.

ד. הוכחה:

$$x \in f^{-1}\left(D_1^C\right) \Leftrightarrow f(x) \in D_1^C \Leftrightarrow f(x) \notin D_1 \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(D_1) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(D_1)^C$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

ה. דוגמא נגדית:

נניח ש $X=\{1,2\},Y=\{1\}$ $X=\{1,2\},Y=\{1,2,3\}$ ונגדיר פונקציה $f:X\to Y$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $f(x)=1$. נניח ש $C_1=\{1,2\},C_2=\{2\}$. אזי $f[C_1\setminus C_2]=\{1\}\neq\varnothing=f[C_1]\setminus f[C_2]$.

ו. הוכחה:

$$x\in f^{-1}[D_1\setminus D_2]\leftrightarrow f(x)\in D_1\setminus D_2\leftrightarrow f(x)\in D_1\wedge f(x)\notin D_2\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x\in f^{-1}[D_1]\wedge x\notin f^{-1}[D_2]\leftrightarrow x\in f^{-1}[D_1]\setminus f^{-1}[D_2]$$

כל המעברים נובעים ישירות מההגדרות.

שאלה 1

בכל סעיף נתונות שתי קבוצות – A,B. עליכם לבנות עבור כל זוג קבוצות כאלה שתי פונקציות: $f:A\to B$, $g:B\to A$ כך ש-$g\circ f=id_A$. (id_A היא פונקציית הזהות על A).

1. $A=\mathbb{Q},B=\mathbb{R}$
2. $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ B=P(\mathbb{Z})$.
3. $A=P([0,1])$, B היא קבוצת הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$.

פיתרון

הערה: יש הרבה תשובות נכונות לכל הסעיפים.

פתרון 1: נגדיר $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=x$ ונגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ ע"י $g(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ 5 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. אזי לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(x)=x\in\mathbb{Q}$ ולכן $g\big(f(x)\big)=g(x)=x$, כלומר $g\circ f=id_{\mathbb{Q}}$.

פתרון 2: נגדיר $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to P(\mathbb{Z})$ ע"י $f(n,m)=\{n,-m\}$. נגדיר $g:P(\mathbb{Z})\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:
<u>אם $C\subseteq\mathbb{Z}$ מקיימת $|C\cap\mathbb{N}|=|C\setminus(\mathbb{N}\cup\{0\})|=1$</u> (כלומר, C מכילה בדיוק איבר חיובי אחד ואיבר שלילי אחד), אז נסמן ב-x את האיבר היחיד ב-$C\cap\mathbb{N}$ וב-y את האיבר היחיד ב-$C\setminus(\mathbb{N}\cup\{0\})$ ונגדיר $g(C)=(x,-y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (שימו לב ש—$-y\in\mathbb{N}$ כי y שלם ושלילי).
<u>אם $A\subseteq\mathbb{Z}$ לא מקיימת $|C\cap\mathbb{N}|=|C\setminus(\mathbb{N}\cup\{0\})|=1$</u>, אז נגדיר $g(C)=(2,6)$.

כעת, לכל $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים ש-$f(n,m)=\{n,-m\}$ היא קבוצה שמכילה בדיוק איבר חיובי אחד ואיבר שלילי אחד ולכן $g\big(f(n,m)\big)=g(\{n,-m\})=\big(n,-(-m)\big)=(n,m)$ לפי ההגדרה של g. לכן, $g\circ f=id_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

פתרון 3: לכל $C\in P([0,1])$ נגדיר פונקציה $h_C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $h_C(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\notin C\end{cases}$. נגדיר $f:P([0,1])\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $f(C)=h_C$. נגדיר $g:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to P([0,1])$ ע"י $g(h)=h^{-1}(\{1\})\cap[0,1]$ (שימו לב ש-h היא פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$! שימו לב שהחיתוך עם $[0,1]$ הכרחי כי אחרת g תחזיר ערכים שאינם ב-$P([0,1])$.)

אנו טוענים שלכל $C\in P([0,1])$ מתקיים $C=g\big(f(C)\big)$. באמת:
$x\in g\big(f(C)\big)$ אם"ם $x\in g(h_C)=h_C^{-1}(\{1\})\cap[0,1]$ אם"ם $x\in[0,1]$ וגם $x\in h_C^{-1}(\{1\})$ אם"ם $x\in[0,1]$ וגם $h_C(x)=1$ אם"ם (לפי הגדרת h_C) $x\in[0,1]$ וגם $x\in C$ אם"ם $x\in C\cap[0,1]=C$.

לכן, $g\circ f=id_{P[0,1]}$ וגמרנו.

שאלה 2

בכל סעיף נתונות שתי קבוצות – A,B. עליכם לבנות עבור כל זוג קבוצות כאלה $f:A\to B$ כך ש-f הפיכה.

1. $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ B=\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$
2. $A=P(\mathbb{N}),\ B=P(\{2n\mid n\in\mathbb{N}\})$
3. $A=[1,2)\cup[3,8],\ B=[0,1]$.

פיתרון

הערה: יש הרבה תשובות נכונות לכל הסעיפים.

פיתרון 1: נגדיר $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ ע"י: $f(n,m)=\begin{cases}(n,2m+1) & m\geq 0\\ (n,-2m) & m<0\end{cases}$.

כדי להראות ש-f הפיכה מספיק למצוא $g:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש-$g\circ f=id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ו-$f\circ g=id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ (דרך אחרת היא להראות ש-f חח"ע ועל; לא נעשה זאת כאן).

נגדיר את g ע"י $g(n,m)=\begin{cases}(n,-\frac{m}{2}) & 2|m\\ (n,\frac{m-1}{2}) & 2|m+1\end{cases}$.

[הערה: אפשר למצוא את g מהאילוץ $g\circ f=id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ שאומר שלכל $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ מתקיים:
$g(n,2m+1)=g\big(f(n,m)\big)=(n,m)$ אם $m\geq 0$
ו-$g(n,-2m)=g\big(f(n,m)\big)=(n,m)$ אם $m<0$.
אם נציב $k=2m+1$ בשוויון הראשון נקבל $g(n,k)=(n,\frac{k-1}{2})$ עבור k אי זוגי. באופן דומה מקבלים $g(n,k)=(n,-\frac{k}{2})$ עבור k זוגי מהשוויון השני.]

באמת, לפי הגדרות g,f מתקיים:
$g\big(f(n,m)\big)=g(n,2m+1)=\left(n,\frac{(2m+1)-1}{2}\right)=(n,m)$ עבור $n,m\in\mathbb{Z}$ כאשר $m\geq 0$.
$g\big(f(n,m)\big)=g(n,-2m)=\left(n,-\frac{-2m}{2}\right)=(n,m)$ עבור $n,m\in\mathbb{Z}$ כאשר $m<0$.
ולכן $g\circ f=id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.
$f\big(g(n,m)\big)=f\left(n,-\frac{m}{2}\right)=\left(n,-2\left(-\frac{m}{2}\right)\right)=(n,m)$ עבור $n\in\mathbb{Z}$ ו-$m\in\mathbb{N}$ זוגי.
$f\big(g(n,m)\big)=f\left(n,\frac{m-1}{2}\right)=\left(n,2\left(\frac{m-1}{2}\right)+1\right)=(n,m)$ עבור $n\in\mathbb{Z}$ ו-$m\in\mathbb{N}$ אי-זוגי.
ולכן $f\circ g=id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$.

פיתרון 2: נגדיר $f:P(\mathbb{N})\to P(\{2n\mid n\in\mathbb{N}\})$ ע"י $f(X)=\{2n\mid n\in X\}$. נראה ש-f הפיכה ע"י כך שנמצא $g:P(\{2n\mid n\in\mathbb{N}\})\to P(\mathbb{N})$ כך ש- $g\circ f=id_{P(\mathbb{N})}$ ו-$f\circ g=id_{P(\{2n|n\in\mathbb{N}\})}$.

נגדיר את g ע"י $g(Y)=\left\{\frac{n}{2}\,\middle|\, n\in Y\right\}$ (שימו לב ש-$g(Y)$ היא אכן קבוצה של מספרים טבעיים כי $Y\subseteq\{2n|n\in\mathbb{N}\}$ ולכן כל האיברים ב-Y זוגיים.) כעת:

לכל $g(f(X))=g(\{2n|n\in X\})=\left\{\frac{m}{2}\middle|m\in\{2n|n\in X\}\right\}=\left\{\frac{2n}{2}\middle|n\in X\right\}=\{n|n\in X\}=X$ $X\in P(\mathbb{N})$ ולכן $g\circ f=id_{P(\mathbb{N})}$.

לכל $f(g(X))=f\left(\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in X\right\}\right)=\left\{2m\middle|m\in\left\{\frac{n}{2}\middle|n\in X\right\}\right\}=\left\{2\left(\frac{n}{2}\right)\middle|n\in X\right\}=\{n|n\in X\}=X$ $X\in P(\{2n|n\in\mathbb{N}\})$ ולכן $f\circ g=id_{P(\{2n|n\in\mathbb{N}\})}$.

הערה: עבור $A\subseteq\mathbb{R}$ ו-$a\in\mathbb{R}$ אפשר להגדיר את aA להיות הקבוצה $\{ax|x\in A\}$. לדוגמא, $2\mathbb{N}=\{2n|n\in\mathbb{N}\}$. בעזרת הסימון החדש אפשר לתת תיאור פשוט של f,g מקודם ע"י $f(X)=2X$ ו-$g(X)=\frac{1}{2}X$. אם מוכיחים שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ ו-$A\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים $a(bA)=(ab)A$, קל מאוד לבדוק ש-$g=f^{-1}$.

פיתרון 3: נגדיר $f:[1,2)\cup[3,8]\to[0,1]$ ע"י $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & x\in[1,2)\\ \frac{x-3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{x}{10}+\frac{1}{5} & x\in[3,8]\end{cases}$.

הפונקציה f אכן מקבלת ערכים ב-$[0,1]$ כי לכל $1\le x<2$ ($x\in[1,2)$) מתקיים $1\le\frac{1}{2}=\frac{1}{2}2-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}1-\frac{1}{2}=0$, כלומר $f(x)\in[0,1]$, ולכל $3\le x\le 8$ מתקיים $1=\frac{1}{5}+\frac{8}{10}\le\frac{1}{5}-\frac{x}{10}\le\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}\le 0$, כלומר $f(x)\in[0,1]$.

נראה כי f הפיכה ע"י שנוכיח כי f חח"ע ועל (אפשר גם למצוא את הפונקציה ההפוכה ל-f, אבל צריך לגוון ☺).

<u>f חח"ע:</u> נניח כי $f(x)=f(y)$ עבור $x,y\in[1,2)\cup[3,8]$. החישובים מקודם מראים שאם $z\in[1,2)$ אז $f(z)\in[0,\frac{1}{2})$ ואם $z\in[3,8]$ אז $f(z)\in[\frac{1}{2},1]$. לכן, אם $f(x)=f(y)$ אז בהכרח $x,y\in[1,2)$ או $x,y\in[3,8]$. במקרה הראשון $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=f(x)=f(y)=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$ ולכן $x=y$ (כופלים ב-2 ומוסיפים 1 לכל האגפים). במקרה השני $\frac{1}{10}x-\frac{1}{5}=f(x)=f(y)=\frac{1}{10}y-\frac{1}{5}$ ולכן $x=y$ (כופלים ב-10 ומוסיפים 2 לכל האגפים). בכל מקרה קיבלנו $x=y$ ולכן f חח"ע.

<u>f על:</u> יהי $x\in[0,1]$. נחלק למקרים:

אם $0\le x<\frac{1}{2}$ (כלומר $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$) אזי $1=2\cdot 0+1\le 2x+1<2\cdot\frac{1}{2}+1=2$ ולכן $2x+1\in[1,2)\subseteq[1,2)\cup[3,8]$. כעת לפי הגדרת f, $f(2x+1)=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}=x$.

אם $\frac{1}{2}\le x\le 1$ (כלומר $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$) אזי $3=10\cdot\frac{1}{2}-2\le 10x-2<10\cdot 1-2=8$ ולכן $2x+1\in[3,8]\subseteq[1,2)\cup[3,8]$. כעת לפי הגדרת f, $f(10x-2)=\frac{1}{10}(10x-2)+\frac{1}{5}=x$.

בכל מקרה קיבלנו של-x יש מקור ולכן f על.

שאלה 3

תהיינה A,B,C,D קבוצות ו-$f:A\to B,\ \ g:B\to C,\ \ h:C\to D$. הוכיחו או הפריכו:

1. $h\circ g\circ f$ הפיכה גורר ש-g חח"ע או g על.
2. $h\circ g\circ f$ חח"ע ו-$h\circ g$ חח"ע גורר ש-$g\circ f$ חח"ע
3. $h\circ g\circ f$ על ו-$h\circ g$ על גורר ש-$g\circ f$ על
4. $h\circ g\circ f$ על ו-$g\circ f$ על גורר ש-$h\circ g$ על.

5. $g\circ f$ הפיכה ו-$h\circ g$ הפיכה גורר ש-g הפיכה
6. $g\circ f$ הפיכה ו-$h\circ g$ הפיכה גורר ש-$f\circ g\circ h$ הפיכה

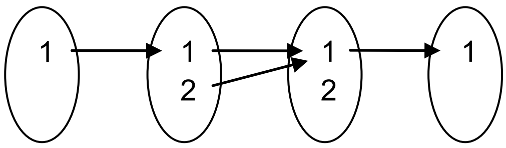
פתרון

1. דוגמא נגדית: נבחר $A=\{1\}, B=\{1,2\}, C=\{1,2\}, D=\{1\}$ ונגדיר את f,g,h ע"י:
$f(x)=1$ לכל $x\in A$, $g(x)=1$ לכל $x\in B$, $h(x)=1$ לכל $x\in C$.

אזי $h\left(g\left(f(1)\right)\right)=1$ ולכן $h\circ g\circ f$ על. מצד שני, ב-A יש רק איבר אחד ולכן $h\circ g\circ f$ חח"ע.

לכן, $h\circ g\circ f$ הפיכה. אבל g לא חח"ע ולא על כי $g(2)=1=g(1)$ ואין $x\in B$ כך ש-$g(x)=2\in C$.

ציור של הדוגמא: [לא חובה לצייר בבוחן או במבחן. זה רק כדי שתבינו.]



2. הוכחה: $h\circ g\circ f=(h\circ g)\circ f$ חח"ע ולכן f חח"ע (לפי תכונות שראינו בשיעור). $h\circ g$ חח"ע ולכן g חח"ע (לפי אותה תכונה). לכן, $g\circ f$ חח"ע כהרכבה של פונקציות חח"ע. **משל.**

3. דוגמא נגדית: הדוגמא הנגדית של סעיף 1 טובה גם כאן. ב-D יש רק איבר אחד ולכן $h\circ g\circ f$ ו-$h\circ g$ על. אבל $g\circ f$ לא על כי ל-$2\in C$ אין מקור (באמת, $(g\circ f)(1)=1$).

4. הוכחה: $h\circ g\circ f=h\circ(g\circ f)$ היא על ולכן h על (לפי תכונה שראינו בשיעור). $g\circ f$ על ולכן g על (לפי אותה תכונה). לכן, $h\circ g$ על כהרכבה של שתי פונקציות שהן על. **משל.**

5. הוכחה: $g\circ f$ הפיכה, לכן היא על ולכן גם g על. $h\circ g$ הפיכה, לכן היא חח"ע ולכן גם g חח"ע. הראינו ש-g חח"ע ועל ולכן g הפיכה. **משל.**

6. הוכחה: הראינו בסעיף 5 ש-g הפיכה. לכן, g^{-1} קיימת והיא גם הפיכה. הרכבת פונקציות הפיכות היא גם הפיכה ולכן $f=id_B\circ f=(g^{-1}\circ g)\circ f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ הפיכה (נתון ש-$g\circ f$ הפיכה) ו-$h=h\circ id_C=h\circ(g\circ g^{-1})=(h\circ g)\circ g^{-1}$ הפיכה (נתון ש-$h\circ g$ הפיכה). קיבלנו ש-f,g,h הפיכות ולכן $h\circ g\circ f$ הפיכה כהרכבת פונקציות הפיכות. **משל.**

שאלה 4

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר $f:P(A)\to P(B)$ ע"י $f(X)=X\cap B$.

1. הוכיחו כי f חח"ע אם ורק אם $A\subseteq B$.
2. הוכיחו כי f על אם ורק אם $B\subseteq A$.

פיתרון

הוכחת 1: <u>כוון א:</u> נניח כי f חח"ע. יהי $x\in A$, אזי $\{x\},\phi\in P(A)$. היות ו-f חח"ע אז $\{x\}\cap B=f(\{x\})\neq f(\phi)=\phi\cap B=\phi$ (כי $\{x\}\neq\phi$). לכן, בהכרח קיים $y\in\{x\}\cap B$ (אחרת $\{x\}\cap B$ קבוצה ריקה). בפרט, $y\in\{x\}$ ולכן $y=x$. אבל $y\in B$ ולכן $x\in B$. כדרוש.

<u>כוון ב:</u> נניח $A\subseteq B$ ונניח ש-$f(X)=f(Y)$ עבור $X,Y\in P(A)$. אזי, $X\subseteq A\subseteq B$ ולכן $X=X\cap B=f(X)$. באותו אופן $f(Y)=Y$. לכן, $X=f(X)=f(Y)=Y$, כדרוש.

משל.

הוכחת 2: <u>כוון א:</u> נניח כי f על. יהי $x \in B$, אזי $\{x\} \in P(B)$ ולכן קיימת $X \in P(A)$ כך ש-$\{x\} = f(X) = X \cap B$. לכן, $x \in X \subseteq A$ וקיבלנו $x \in A$, כדרוש.

<u>כוון ב:</u> נניח $A \subseteq B$ ותהי $X \in P(B)$. אזי $X \subseteq B \subseteq A$ ולכן $X \in P(A)$. זה אומר ש-f מוגדרת על X. [הערה: חשוב לבדוק שהאיברים שאנו מציבים ב-f הם תתי קבוצות של A. אם זה לא ברור, חובה להוכיח זאת!] כעת, $f(X) = X \cap B = X$ ולכן ל-X יש מקור. כדרוש.

משל.