96

מטלה תרגיל 7

יפה מאוד!!

1) יהי (A,R) קס"ח. נגדיר $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

א) צ"ל: R^{-1} קס"ח.

נראה שהיחס אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי, וכך נראה שהוא קס"ח, לפי ההגדרה.

(i) אנטי סימטרי:

יהי $a,b \in A$ כך ש $(a,b),(b,a) \in R^{-1}$.

נבקש להראות כי $a=b$.

$(a,b) \in R^{-1} \rightarrow (b,a) \in R$

$(b,a) \in R^{-1} \rightarrow (a,b) \in R$

(מהגדרת היחס R^{-1})

מכיוון ש R קס"ח, בפרט הוא אנטי-סימטרי, ולכן

$(a,b),(b,a) \in R \rightarrow a=b$

הראינו ש $(a,b),(b,a) \in R^{-1} \rightarrow a=b$ ולכן R^{-1} יחס אנטי סימטרי.

(ii) טרנזיטיבי:

יהי $a,b,c \in R^{-1}$ כך ש: $aR^{-1}b$, $bR^{-1}c$.

צ"ל $aR^{-1}c$.

לפי הגדרת R^{-1}

$aR^{-1}b \rightarrow bRa$

$bR^{-1}c \rightarrow cRb$

מהטרנזיטיביות של R: $cRb, bRa \rightarrow cRa$

ושוב מהגדרת R^{-1}: $cRa \rightarrow aR^{-1}c$

הראינו ש $aR^{-1}b, bR^{-1}c \rightarrow aR^{-1}c$ ולכן R^{-1} טרנזיטיבי.

הראינו ש R^{-1} אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי, ולכן לפי ההגדרה הוא קס"ח.

חסר: רפלקסיבי במקרה ש (A,R) קס"ח במובן החלש.
אנטי רפלקסיבי במקרה ש- (A,R) זה במובן החזק!

-2

ט) צ"ל:

$$\exists a\in A\,\forall b\in A:(aRb \vee a=b) \longrightarrow \exists c\in A\,\forall b\in A:(bR^{-1}c \vee c=b)$$

נניח ש $\exists a\in A\,\forall b\in A(aRb \vee a=b)$ מתקיים.

נראה: $\exists c=a\,\forall b\in A(bR^{-1}c \vee c=b)$.

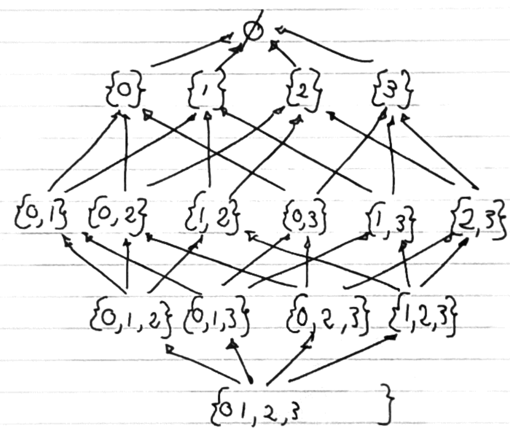
(כלומר אתה לוקח את a ומראה את הדרוש עליו)

יהי $b\in A$. אזי:

(i) אם $b=a$ אז $c=a=b$, ובפרט מתקיים $bR^{-1}c \vee c=b$.

(ii) אם aRb מתקיים, אז לפי ההגדרה של R^{-1}, $bR^{-1}a$ מתקיים,
כלומר, $bR^{-1}c$ מתקיים, ובפרט $bR^{-1}c \vee c=b$, והוכחנו את מה שהיה צריך

י) נסתכל על הקס"ח $(P(\{0,1,2,3\}),\subseteq)$. צייר דיאגרמת הסה.



(2) $\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq} := \{\langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle \subseteq \mathbb{N} : \forall n\in\mathbb{N}\,(x_n \le x_{n+1})$

נגדיר $\preceq$:

$$x=\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle \preceq y=\langle y_n:n\in\mathbb{N} \leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}:\forall m>n\,(x_m<y_m)$$

א) בדקו ש $(\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq},\preceq)$ קס"ח.

תכנית: נראה שהיחס $\preceq$ אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי, מה שגורר ביחס אנטי סימטריות (לפי הוכחה שביצענו בהרצאה), ולפי ההגדרה זה יוכיח שהיחס הוא קס"ח.

(i) אנטי-רפלקסיבי: יהי $x_n\in\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq}$. נראה כי $(x_n,x_n)\notin\preceq$.
נניח בשלילה: נניח ש $x_n\preceq x_n$ כלומר:

$$x_n\preceq x_n \longrightarrow \exists n\in\mathbb{N}:\forall m>n\,(x_m<x_m)$$

אז נבחר ב n. מתקיים שלכל m>n, $x_m<x_m$, אך מתכונות > של המספרים הטבעיים, זה לא נכון, קיבלנו סתירה להנחה. לכן לא מתקיים $x_n\preceq x_n$, לכן היחס אנטי-רפלקסיבי.

(ii) טרנזיטיביות: יהי $a_n,b_n,c_n\in\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq}$ כך ש $a\preceq b$, $b\preceq c$
נ"ל $a\preceq c$

$$a\preceq b \longrightarrow \exists n'\in\mathbb{N}\,\forall m>n\,(a_n<b_n)$$
$$b\preceq c \longrightarrow \exists n''\in\mathbb{N}\,\forall m>n\,(b_n<c_n)$$

נבחר ב $n=\max(n',n'')$, ונבחר m>n שרירותי. (נבחר "m>n', m>n")
כך שיתקיים לפי ההנחה $a_m<b_m$, $b_m<c_m$
מטרנזיטיביות היחס > של הטבעיים, יתקיים כי $a_m<c_m$.
הראינו שלכל m>n מתקיים $a_m<c_m$, ולכן:

$$\exists \mathbb{N}\ni n=\max(n',n'')\,\forall m>n: a_m<c_m \longrightarrow a_n\preceq c_n$$

הראינו שהיחס אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי $\longrightarrow$ אנטי סימטרי (לפי משפט מההרצאה), ולכן לפי ההגדרה זהו יחס קס"ח.

ב) הוכיחו או הפריכו: $\exists x\neq y\in\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq}:(x\npreceq y)\wedge(y\npreceq x)$, כלומר, יחס לא שלם.

הוכחה: נפריך ע"י מתן דוגמא ל $x\neq y\in\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq}$ כך שתנאי השלמות לא מתקיים.

יהי $x_n=(0,2,2,2\ldots)$, $y_n=(1,2,2,2,2\ldots)$
מתקיים $x_n\neq y_n$

$$\forall n>1\,(y_n=x_n=2) \longrightarrow \neg\exists n\in\mathbb{N}:\forall m>n:(x_m<y_m) \longrightarrow \neg(x_n\preceq y_n)\wedge\neg(y_n\preceq x_n)$$
(נבחר, $x_n=y_n$)

קיימים $x,y\in\mathbb{N}^{\uparrow}_{seq}$ הלא מתייחסים אחד לשני, ולכן לפי הגדרה היחס אינו שלם ■

אפשר גם: (101010...) , (010101...).

3) יהי $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\dots\times\mathbb{N}}_{n \text{ פעמים}}$. נגדיר על $\mathbb{N}^n$ את היחס באופן הבא:

$$a=(a_1,\dots,a_n)<b=(b_1,\dots,b_n) \iff \exists_{k\le n}\forall_{i<k}(a_i=b_i)\wedge(a_k<b_k)$$

א) הוכח כי $(\mathbb{N}^n,<)$ קס"ח.

הוכחה: נראה כי היחס אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי, ולפי משפט מההרצאה זה יגרור אנטי-סימטריות. אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות יוכיחו לפי ההגדרה קס"ח.

(i) אנטי-רפלקסיביות:

יהי $a\in\mathbb{N}^n$. נראה כי $\neg(a<a)$.

$$a=a \to \forall_{i<n}(a_i=a_i) \to \neg\exists_{k\le n}(a_k<a_k) \to \neg\exists_{k<n}\forall_{i<k}(a_i=a_i)\wedge(a_k<a_k) \to$$

$$\to \neg(a<a) \to (\mathbb{N}^n,<) \text{ אנטי-רפלקסיבי}$$

(ii) טרנזיטיביות:

יהי $a,b,c\in\mathbb{N}^n$ כך ש $a<b,\ b<c$ צ"ל $a<c$.

לפי הגדרת היחס:

$$a<b \to \exists_{k'<n}\forall_{i<k'}(a_i=b_i\wedge a_{k'}<b_{k'})$$

$$b<c \to \exists_{k''<n}\forall_{i<k''}(b_i=c_i\wedge b_{k''}<c_{k''})$$

נחלק למצבים: (אפשר פשוט לקחת! $k=\min(k',k'')$.)

אם $k=k'=k''$

$$\forall_{i<k}(a_i=b_i\wedge b_i=c_i\wedge a_k<b_k\wedge b_k<c_k)$$

כלומר, מטרנזיטיביות של "=" ו-"<" של המספרים הטבעיים:

$$\forall_{i<k}(a_i=c_i\wedge a_k<c_k)$$

אם $k'<k''$

$$\forall_{i<k'}((a_i=b_i\wedge a_{k'}<b_{k'})\wedge(b_i=c_i\wedge b_{k'}=c_{k'}))$$

בפרט: מטרנזיטיביות של = ו- < של הטבעיים.

$$a_{k'}<b_{k'}=c_{k'}\to a_{k'}<c_{k'}$$

$$\forall_{i<k'}(a_i=b_i\wedge b_i=c_i)\to\forall_{i<k'}(a_i=c_i)$$

ולכן, $\exists_{k=k'}\forall_{i<k}(a_i=c_i\wedge a_k<c_k)\to a<c$

אם $k''<k'$

$$\forall_{i<k''}((b_i=c_i\wedge b_{k''}<c_{k''})\wedge(a_i=c_i\wedge a_{k''}<b_{k''}))$$

ובפרט מהטרנזיטיביות של = ו- < על הטבעיים

$$a_{k''}=b_{k''}<c_{k''}\to a_{k''}<c_{k''}$$

$$\forall_{i<k''}(a_i=b_i\wedge b_i=c_i)\to\forall_{i<k''}(a_i=c_i)$$

ולכן $\exists_{k=k''}\forall_{i<k}(a_i=c_i\wedge a_k<c_k)\to a<c$.

בכל מצב מתקיים $a<c$, ולכן היחס טרנזיטיבי.

הוכחנו אנטי רפלקסיביות וטרנזיטיביות, לכן לפי הוכחה מהכיתה היחס גם אנטי סימטרי, מטרנזיטיביות ואנטי-סימטריות לפי ההגדרה היחס קס"ח. ■

ב) הוכח או הפרך: $\forall a\neq b\in \mathbb{N}^n\left(a<b \vee b<a\right)$:

נוכיח בדרך השלילה:

נניח כי $\neg\left(\exists k\leq n\left(\forall i<k\left(a_i=b_i\right)\right)\wedge\left(a_k<b_k\right)\right)\wedge\neg\left(\exists k\leq n\left(\forall i<k\left(b_i=a_i\right)\right)\wedge\left(b_k<a_k\right)\right)$

נפרט: $\neg\left(\exists k\leq n\left(a_k<b_k\right)\right)\wedge\neg\left(\exists k\leq n\left(b_k<a_k\right)\right)$

אז לפי הגדרת השוויון: $\forall k\leq n\left(a_k\geq b_k\right)\wedge\left(b_k\geq a_k\right)\rightarrow\forall k\leq n\ a_k=b_k$

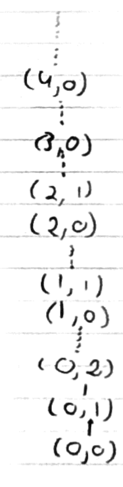
$\forall k\leq n\ a_k=b_k\rightarrow a=b$, בסתירה להנחה כי $a\neq b$.

לכן, ההנחה השניה ש $\neg\left((a<b)\vee(b<a)\right)$ שגויה,

כלומר, מתקיים $a<b\vee b<a$ ∎

ג) עבור המקרה $n=2$ נצייר דיאגרמת הסה.

יחס קסה שלם הוא יחס קווי על פי ההגדרה.



4) יהי X קבוצה. נגדיר את $\mathcal{R}$ להיות קבוצת כל היחסים החלשים על $\mathcal{R}$.
נגדיר $\sqsubseteq$ כך שעבור $\leq$, $\trianglelefteq$ יחסים חלשים של X מתקיים:
$\leq \sqsubseteq \trianglelefteq \longleftrightarrow \forall x,y\in X\,(x\leq y \to x\trianglelefteq y)$

א) הוכח או הפרך: $(\mathcal{R}, \sqsubseteq)$ קס"ח.

נוכיח על פי ההגדרה: אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות. (חסר: רפלקסיביות)

-2

(i) אנטי-סימטריות:
יהי $\trianglelefteq, \leq \in \mathcal{R}$ כך ש $\trianglelefteq\sqsubseteq\leq$, $\leq\sqsubseteq\trianglelefteq$.
צ"ל $\trianglelefteq=\leq$. נראה זאת ע"י הכלה דו כיוונית.
$\subseteq$ יהי $(x,y)\in\leq$. צ"ל $(x,y)\in\trianglelefteq$.
לפי הגדרת $\sqsubseteq$ $\quad \leq\sqsubseteq\trianglelefteq \to (x,y)\in\leq \to (x,y)\in\trianglelefteq$

$\supseteq$ יהי $(x,y)\in\trianglelefteq$. צ"ל $(x,y)\in\leq$.
לפי הגדרת $\sqsubseteq$. $\quad \trianglelefteq\sqsubseteq\leq \longleftrightarrow (x,y)\in\trianglelefteq \to (x,y)\in\leq$

מהכלה דו כיוונית הראינו ש $\leq\sqsubseteq\trianglelefteq, \trianglelefteq\sqsubseteq\leq \longrightarrow \leq=\trianglelefteq$. לכן היחס אנטי-סימטרי!

(ii) טרנזיטיביות:
יהי $\simeq, \trianglelefteq, \leq \in \mathcal{R}$ כך ש $\simeq\sqsubseteq\trianglelefteq, \trianglelefteq\sqsubseteq\leq$. צ"ל $\simeq\sqsubseteq\leq$.

יהי $(x,y)\in\leq$ שרירותי.
$\leq\sqsubseteq\trianglelefteq \to (x,y)\in\leq \to (x,y)\in\trianglelefteq$
$\trianglelefteq\sqsubseteq\simeq \to (x,y)\in\trianglelefteq \to (x,y)\in\simeq$.

ובפרט: $(x,y)\in\leq \longrightarrow (x,y)\in\simeq \longleftrightarrow \leq\sqsubseteq\simeq$.

הראינו ש $\leq\sqsubseteq\trianglelefteq, \trianglelefteq\sqsubseteq\simeq \longrightarrow \leq\sqsubseteq\simeq$, ולכן היחס טרנזיטיבי.

היחס טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי, ולכן על פי ההגדרה הוא קס"ח. ∎

ב) הוכח או הפרך: $(R,\sqsubseteq)$ יחס שלם.

נבחר ביחס חלש $\leq$ על X כך ש:

$(a,b)\in\leq \longleftrightarrow a\leq b$

נבחר ביחס חלש $\geq$ על X כך ש:

$(a,b)\in\geq \longleftrightarrow b\leq a$

נניח בדרך השלילה שמתקיים $(\leq\sqsubseteq\geq)\vee(\geq\sqsubseteq\leq)$.

אם $\leq\sqsubseteq\geq$:

יהי $a\neq b\in X$ כך ש $a\leq b$ מתקיים.

$\leq\sqsubseteq\geq\to(a\leq b\to a\geq b)$.

על פי הגדרת השוויון $a\leq b\wedge a\geq b\to a=b$

בסתירה לכך ש $a\neq b$.

אם $\geq\sqsubseteq\leq$:

יהי $a\neq b\in X$ כך ש $a\geq b$ מתקיים.

$\geq\sqsubseteq\leq\to(a\geq b\to a\leq b)$.

על פי הגדרת השוויון. $a\geq b\wedge a\leq b\to a=b$

בסתירה לכך ש $a\neq b$.

קיבלנו סתירה, לכן ההנחה ש $(\geq\sqsubseteq\leq)\vee(\leq\sqsubseteq\geq)$ שגויה.

כלומר, קיימים שני יחסים שלא מתייחסים אחד לשני, ולכן היחס לא שלם. ■