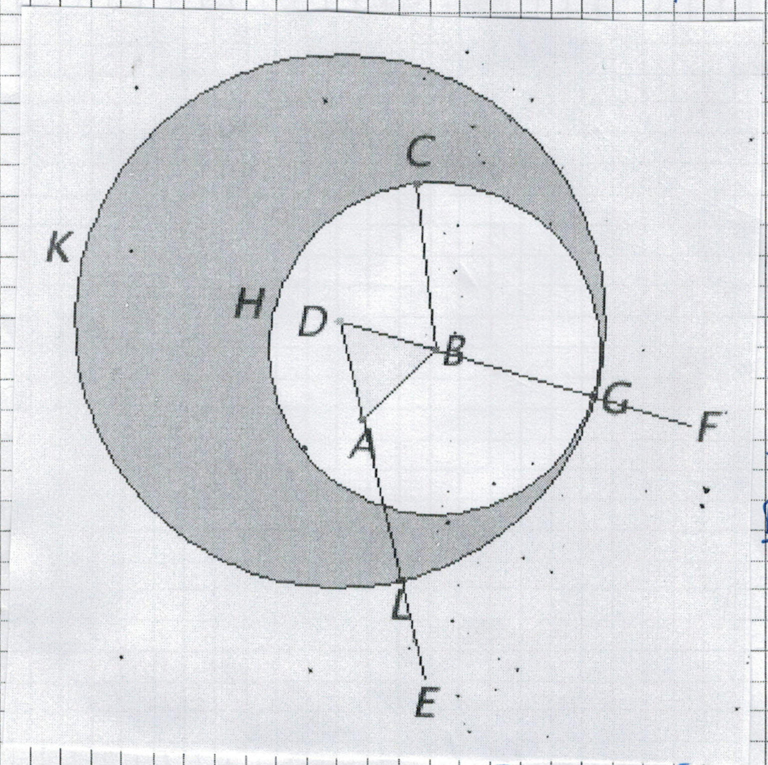
בס"ד

משפט 2 של אוקלידס

מנקודה נתונה (כקצה) ניתן לשרטט קטע השווה לקטע נתון.



הוכחה:

נניח שהקטע הנתון הוא BC ואנו מעוניינים לבנות קטע שאחד מקצותיו הוא - A.

לשם ההוכחה נעביר את הקטע AB ונבנה עליו משולש DAB שווה צלעות כפי שהוכחנו שניתן לבנות במשפט 1 (מהכיתה).

נמשיך את הישרים DA,DB ונקבל את DF ואת DE.

נגדיר את הנקודה B להיות מרכז של מעגל והרדיוס להיות BC ונקבל את המעגל שעובר דרך C,G,H.

באותו אופן נגדיר את D להיות מרכז המעגל ואת DG להיות הרדיוס ונקבל את המעגל שעובר דרך G,K,L.

נקבל: $BC=BG$ (רדיוסים) ו $DL=DG$ (רדיוסים)

אבל $DA=DB$ ולכן $AL=BG$ (אם נחסר מקטעים שווים....)

וגם $BC=BG$ $\Leftarrow$ $AL=BC$

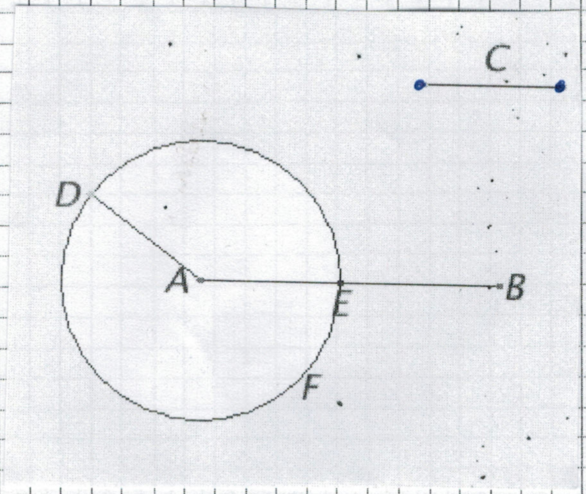
לכן בנינו קו ישר (בקטע) שאחד מקצותיו הוא A והוא שווה באורכו לקטע BC.

משל

בס"ד

משפט 3 של אוקלידס

בהינתן שני ישרים אשר אינם שווים באורכם, ניתן לחתוך מהישר הגדול ישר השווה באורכו לישר הקטן.



הוכחה:

נתון הקטע הקצר C ←

והקטע הארוך AB.

יהי הקטע AD שווה באורכו ל- C.

יהי A מרכז מעגל ו AD הרדיוס.

לכן $AD = AE$ (רדיוסים)

לכן $C = AE$

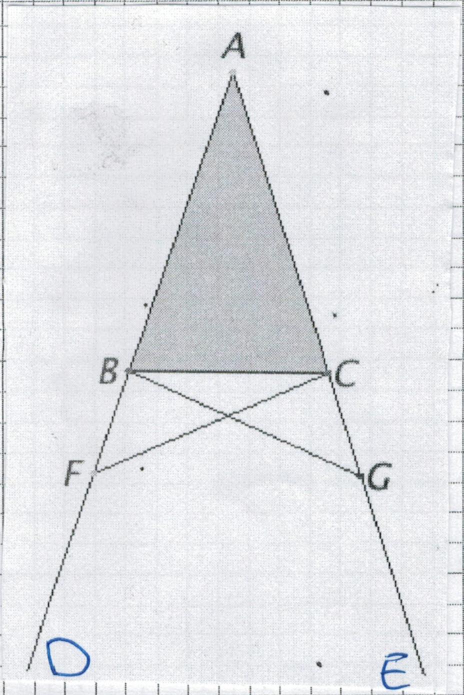
ואכן AE הוא קטע מתוך AB

כך ש AE שווה באורכו לקטע C.

משפט 5 של אוקלידס.

במשולש שווה שוקיים זוית הבסיס שוות זו לזו.

הוכחה:



יהי משולש שו"ש $\triangle ABC$ כך

שבו: $AB = AC$.

נמשיך את הקטעים AB ו AC

עד לנקודות D, E בהתאמה.

ניקח נקודה כלשהי F על BD.

תהי G נקודה על AE כך ש: $AG = AF$

(ניתן לעשות זאת לפי משפט 3)

נחבר את הקטעים F-C, G-B - כמובא בציור.

הואיל ו $AB = AC$ ו $AF = AG$ אזי לפי

משפט 4 המשולשים חופפים $\triangle ABG \cong \triangle ACF$ כי יש להם

2 צלעות שוות וזוית ביניהן (A) משותפת: שווה.

לכן $BG = FC$, $\measuredangle ABG = \measuredangle ACF$, $\measuredangle AGB = \measuredangle AFC$

הואיל ו $AF = AG$ ו $AB = AC$ $\Leftarrow$ $BF = CG$

(הורדת קטעים שווים מקטעים שווים)

וכן $FC = BG$ (הוכחנו) והזוית שבין הצלעות $\measuredangle AFC = \measuredangle AGB$

ולכן $\triangle BFC \cong \triangle CGB$

לכן בפרט $\measuredangle FBC = \measuredangle GCB$ והרי ידוע ש-

(שכוללת את $\measuredangle CGB$) $\measuredangle GBA = \measuredangle ACG$ (שכוללת את $\measuredangle FBC$)

$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ (נחסר את הזוית הקטנה מתוך הגדולה)

מש"ל.