

אינפי 4 : תרגיל 1

תאריך הגשה : 20.3.16

1. חשבו את האורכים של העקומות הבאות:

א. הספירלה $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), t \in [0, \pi]$.

ב. הציקלואידה $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

ג. העקומה המתקבלת מחיתוך ספירת היחידה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ עם המישור $x + z = 1$.

2. א. הוכיחו שאם לעקומה γ יש אורך והיא נתונה במערכת קאורדינטות קוטביות כ- $r = \rho(\theta)$ כאשר $\theta \in [\alpha, \beta]$ אז אורכה נתון לפי

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את אורך הקרדיואידה

$$r = a(1 + \cos \theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

3. תהי

$$x = \sin \phi \cos \theta, y = \sin \phi \sin \theta, z = \cos \phi (*)$$

פרמטריזציה של ספירת היחידה ב- \mathbb{R}^3 כאשר $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$. תהי

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

עקומה הנמצאת על ספירת היחידה הנתונה לפי ההצגה (*) כאשר $\theta = \theta(t)$ ו- $\phi = \phi(t)$ תלויים בפרמטר t . הוכיחו כי

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + \sin^2(\phi(t)) \cdot (\theta'(t))^2} dt$$

4. מצאו פרמטריזציה בעלת מהירות יחידה לעקומה

$$\gamma(t) = (\cos t, t + \sin t), t \in [0, \pi]$$