

חשבון אינפיניטסימלי 4 (88-236-01) מועד ב', תשע"ב

המרצה: פרופ' אנדריי לרנר

משך המבחן: 2.5 שעות

ללא שימוש בחומר עזר

ענו על 5 השאלות הבאות. ערך כל שאלה: 21 נקודות. שאלה 6 היא נוספת (ערך השאלה הוא 10 נקודות על התנאי שהפתרון יהיה מלא).

1. תהי $M \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה המוגדרת ע"י

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 3, x - 2y + z = 0\}.$$

(א) האם קבוצה זו היא יריעה? אם כן, מהו מימדה?

(ב) מצאו מרחב משיק ל- M בנקודה $(1, 1, 1)$.

2. (א) עבור אילו ערכים של הפרמטרים a ו- n מתקיים

$$\int_{\Gamma} (x^2 y^n + ax)(y dx + x dy) = 0$$

לכל עקומה סגורה $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$?

(ב) חשבו את הערך של התבנית $w = dx \wedge dz - dy \wedge dx$ על הוקטורים

$$\xi_1 = (2, 0, -1), \xi_2 = (1, 3, -2)$$

3. בעזרת משפט גרין חשבו

$$\int_{\Gamma} x^2(y+1)dx - xy^2 dy$$

כאשר $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ נגד כיוון השעון.

4. בעזרת משפט גאוס מצאו נפח הגוף החסום ע"י $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ ו- $y = 2$.

5. בעזרת משפט סטוקס חשבו

$$\int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$$

כאשר Γ היא חיתוך של הספירה $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ עם המישור $x + y + z = 0$ והכיוון על Γ נגד כיוון השעון אם מסתכלים מכיוון חיובי של ציר Ox .

6. עבור פונקציה דיפרנציאבילית $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ותבנית ω הגדר $\varphi^*\omega$. במקרה כאשר ω היא פונקציה לינארית על \mathbb{R}^n הוכח את הנוסחה

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$$

בהצלחה!