שאלת אתגר 3 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

בשאלה זו נשאל את השאלה הבאה: נניח שנתונה לי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ונניח שלכל מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, מתקיים $AB = BA$. כלומר, A מתחלפת עם כל המטריצות. מיהי המטריצה A?

הגדרה. **מטריצה סקלרית** היא מטריצה מהצורה αI עבור $\alpha \in \mathbb{F}$ כלשהו.

דוגמה. המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ היא סקלרית.

שאלה 1. הוכיחו שכל מטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה. כלומר, אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא סקלרית, אזי לכל $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB = BA$.

הגדרה. לכל $1 \leq i, j \leq n$, נגדיר מטריצה E_{ij} באופן הבא: E_{ij} היא המטריצה מסדר $n \times n$, שהאיבר במקום ה-(i,j) שלה הוא 1, ושאר האיברים הם 0.

דוגמה. ב-$\mathbb{F}^{3\times 3}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 2. בשאלה זו נבין איך המטריצות האלו מתנהגות ביחס לכפל. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

א. הוכיחו: במטריצה $A \cdot E_{ij}$, כל עמודה שאינה העמודה ה-j-ית היא עמודת אפסים, וכן $C_j\left(A \cdot E_{ij}\right) = C_i\left(A\right)$. כלומר, העמודה ה-$j$-ית של $A \cdot E_{ij}$ היא העמודה ה-i-ית של A.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $E_{ij} \cdot A$.
(**הדרכה:** שחלוף עשוי להיות לעזר).

שאלה 3. הוכיחו: נניח שנתונה מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB = BA$. כלומר, A מתחלפת עם כל המטריצות. הוכיחו ש-A סקלרית.

כעת נשאל עוד שאלה, שאינה קשורה לשאלה הנ"ל.

שאלה 4. מצאו את כל המטריצות $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ יתקיים

$$\operatorname{tr}\left(AB\right) = \operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(B\right)$$

הדרכה לשאלה 2.

א. כפל עמודה עמודה.

ב. שימו לב ש-$(E_{ij})^t = E_{ji}$ (מדוע?), והיעזרו בסעיף הקודם.

הדרכה לשאלה 3. היעזרו בשאלה 2, כלומר בדקו מה אומר התנאי $E_{ij} \cdot A = A \cdot E_{ij}$.

הדרכה לשאלה 4. נסו להציב במקום B מטריצות מוכרות: מטריצת היחידה, מטריצות אלמנטריות, המטריצות E_{ij}... שילוב מתאים בסדר הנכון עשוי להניב תוצאה.