תרגיל 5

להגשה עד 11.12.17

שאלה 1

יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n$ מספרים ממשיים. נגדיר: $F(x) := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[a_j,\infty)}(x)$, באשר $\mathbf{1}_A$ היא הפונקציה המציינת של הקבוצה A.

מתהליך ההרחבה נקבל את מרחב המידה השלם $(\mathbb{R}, S_F, \mu_F)$.

1. תארו את המידה μ_F המתקבלת ע"י F הנ"ל.
2. מיהן הקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ המדידות S_F?
3. מיהן הפונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המדידות S_F?
4. חשבו את האינטגרלים: $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_F$, $\int_{\mathbb{R}} 1 d\mu_F$.

שאלה 2

יהי $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית סופית, ויהיו f, g פונקציות ממשיות מדידות־$\mathcal{A}$. הוכיחו או הפריכו:

אם לכל $E \in \mathcal{A}$: $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ אזי $f = g$ כמעט בכל מקום־μ.

שאלה 3

הוכיחו את משפט ערך הביניים האינטגרלי עבור אינטגרל לבג:

יהי $(X, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית, ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה־$\mathcal{A}$ כך שקיימים $c, C \in \mathbb{R}$ עבורם לכל $x \in X$ מתקיים: $c \leq f(x) \leq C$.

הוכיחו כי אם $g : X \to [0, \infty)$ אינטגרבילית, אזי קיים $a \in \mathbb{R}$, $c \leq a \leq C$, כך ש: $\int_X fgd\mu = a \int_X gd\mu$.

שאלה 4

יהי $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית, ותהי f_n סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathcal{A}$. הוכיחו או הפריכו:

אם: $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$ וגם: $\int_\Omega f_n d\mu \to 0$, אזי קיימת g אינטגרבילית־μ כך ש: $f_n \leq g$ לכל n.

בהנאה!