תרגול 10

קומפקטיות

1. הגדרה: מרחב טופולוגי (X,τ) יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח שלו קיים תת כיסוי סופי. כלומר, אם $X=\bigcup_{i\in I}O_i$, איחוד של קבוצות פתוחות, אז יש תת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש $X=\bigcup_{i\in J}O_i$

   (א) דוגמא: כל מרחב טופולוגי סופי הוא קומפקטי.

2. הערה: תת מרחב $Y\subseteq X$ יקרא קומפקטי אם הוא קומפקטי כמרחב טופולוגי עם טופולוגיית תת המרחב. זה שקול לתכונה הבאה: אם $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$, כאשר O_i פתוחות בX, אז קיימת תת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש $Y\subseteq\bigcup_{i\in J}O_i$.

3. תרגיל: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ותהא $x_n\to x$ אזי $A=\{x_n\}\cup\{x\}$ היא קבוצה קומפקטית.

4. תרגיל: האם $(X,\tau_{co-finite})$. האם היא קומפקטית?

5. תרגיל: האם קבוצה לא בת מניה X עם הטופולוגיה הקו-מניתית היא קומפקטית?

6. תרגיל: (X,τ) קומפקטי אמ"מ לכל כיסוי פתוח שלו עם קבוצות פתוחות בסיסיות קיים תת כיסוי פתוח.

7. תרגיל: יהי (X,τ) מרחב קומפקטי ו $A\subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אזי A קומפקטית.

8. תרגיל: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ו$Y_1,Y_2\subseteq X$ תת קבוצות קומפקטיות. האם $Y_1\cap Y_2$ קומפקטי?

9. תרגיל: אם X הוא T_2 אזי חיתוך של קומפקטיות $\{A_i\}$ הוא קומפקטי $\bigcap A_i$

10. משפט: X קומפקטי אמ"מ לכל אוסף של תת קבוצות סגורות $\{S_i\}_{i\in I}$ כך ש $\bigcap_{i\in I}S_i=\emptyset$, קיימת תת קבוצה סופית $J\subseteq I$ כך ש $\bigcap_{i\in J}S_i=\emptyset$.

11. תרגיל: אם X הוא מרחב T_2 ו $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$סדרה יורדת של תת קבוצות קומפקטיות לא ריקות (כלומר, $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\ldots$) אזי $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\neq\emptyset$.

12. תרגיל: אם X הוא מרחב T_2 אזי סדרה יורדת של $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ של תת קבוצות סגורות לא ריקות יכולה לקיים כי החיתוך $\bigcap S_n$ ריק. (כלומר, בתרגיל הקודם, הדרישה של הקומפקטיות נחוצה.)

דוגמא: נקח את $X=(0,\infty)$ עם הטופולוגיה המושרית מ$\mathbb{R}$, ו $S_n=(0,\frac{1}{n}]$. זאת סדרה יורדת של קבוצות סגורות בX שהחיתוך שלה ריק.

13. תרגיל: הוכיחו את הטענה הבאה: תמונה רציפה של קומפקטית היא קומפקטית. כלומר, אם $f:X\to Y$ פונקציה רציפה ועל, וX קומפקטי, אז גם Y קומפקטי.

14. תרגיל: פונקציה רציפה מקומפקטי להאוסדורף היא פונקציה סגורה. כלומר, אם $f:X\to Y$ רציפה, X קומפקטי וY האוסדורף, אז f סגורה. (תזכורת, f נקראת סגורה אם לכל $A\subseteq X$ סגרוה מתקיים כי $f(A)$ סגורה בY)

(א) מסקנה: כל פונקציה הפיכה ורציפה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף היא הומיאומורפיזם.

15. תרגיל: יהא (X,τ) מרחב קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו שאם $\tau'\subsetneq\tau$ טופולוגיה על X, אזי (X,τ') לא קומפקטי ואם $\tau\subsetneq\tau'$ טופולוגיה על X, אזי (X,τ') לא האוסדורף.

16. משפט: $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה ו X קומפקטי יש ל$f[X]$ מקסימום ומינימום.

17. תרגיל: יהא X מרחב טופולוגי, $A\subseteq X$ תת קבוצה קומפקטית ו $x\in X\backslash A$. אזי קיימת a כך ש $d(x,A)=d(x,a)$.