

תרגול אנליזה מודרנית 11

בהרצאה הוכחנו שאם $f \geq 0$ מדידה במ"ח (X, S, μ) אזי $\nu(E) := \int_E f d\mu$ מגדירה מידה

חדשה, ובנוסף $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$. נאמר ש- ν רציפה בהחלט ביחס ל- μ ונסמן

$\nu \ll \mu$. נסמן $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, נקראת נגזרת רדון-ניקודים של ν ביחס ל- μ . משפט רדון-

ניקודים אומר שעבור מידות σ סופיות μ, ν כך שמתקיים $\nu \ll \mu$ אזי קיימת נגזרת רדון

ניקודים $f = \frac{d\nu}{d\mu}$, פוקנציה מדידה ואי שלילית.

תרגיל:

יהי (X, S) מ"ח ותהיינה μ, ν, λ מידות σ -סופיות עליו, המקיימות $\mu \ll \lambda, \nu \ll \lambda$. אזי

$$\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda} \text{ ומתקיים } \frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$$

פתרון: ניתן ליישם את משפט רדון-ניקודים על היחסים $\mu \ll \lambda, \nu \ll \lambda$ ולקבל שקיימות

מידות $f = \frac{d\mu}{d\lambda}, g = \frac{d\nu}{d\lambda} \geq 0$ ומדידות כך ש- $\mu(E) = \int_E f d\lambda, \nu(E) = \int_E g d\lambda$ לכל E מדידה. מכאן:

$$(\mu+\nu)(E) = \mu(E) + \nu(E) = \int_E f d\lambda + \int_E g d\lambda = \int_E (f+g) d\lambda = \int_E \left(\frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda} \right) d\lambda$$

$$\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\lambda} + \frac{d\nu}{d\lambda} \text{ ומתקיים } \frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$$

תרגיל: נניח כי X הינה קבוצה וכי $S_1 \subset S_2$ הינן סיגמא אלגברות על X . יהיו μ ו- ν שתי מידות

על (X, S_1) ונניח כי $\nu \ll \mu$. יהי $\bar{\mu}$ הצמצום של μ על (X, S_2) ו- $\bar{\nu}$ הצמצום של ν על

$$(X, S_2). \text{ מצאו דוגמא שבה } \frac{d\mu}{d\nu} \neq \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\nu}}$$

פתרון: ניקח את $X = [0, 1]^2, S_1 = \sigma([0, 1]^2)$ ו- $S_2 = E \times \sigma([0, 1])$, כאשר E הינה הסיגמא

אלגברה הטריטוריאליית על $[0, 1]$. נגדיר $\mu = L([0, 1]^2)$ ו- $\nu(A) = \int_A g(y) f(x) dx dy$ עבור

קבוצה מדידה $A \subset [0, 1]^2$ כאשר f, g הינן פונקציות אי שליליות. קל לראות כי

על $\frac{d\mu}{d\nu} = g(y) f(x)$. על מנת למצוא את $\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\nu}}$ קודם כל נבין מהי המידה $\bar{\mu}$. שווה $1 \cdot m(B)$ על

המלבנים מהצורה $[0, 1] \times B$, כאשר B הינה קבוצה מדידה ב- $[0, 1]$, ו- 0 על מלבנים מהצורה

$\emptyset \times B$. לכן אנו צריכים למצוא פונקציה $h(x, y)$ כך ש

$$\bar{v}(C) = \int_C g(y) f(x) dx dy = \int_C h(x, y) \bar{\mu}$$

$$h(x, y) = Q \cdot 1_{\{x \in [0,1]\}} g(y) \quad \text{כאשר } Q = \int_0^1 f(x) dx \text{ . אכן, עבור } C \text{ מהצורה } \emptyset \times B \text{ ברור כי}$$

$$\bar{v}(C) = \int_{B \setminus \emptyset} g(y) f(x) dx dy = 0 = \int_C h(x, y) \bar{\mu} = 0 \text{ מתקיים}$$

$[0,1] \times B$ נקבל

$$\bar{v}(C) = \int_{B \setminus [0,1]} g(y) f(x) dx dy = Q \int_B g(y) dy$$

עכשיו נניח $\varphi_n = \sum_{i=1}^n c_n 1_{E_n}$ הינה סדרה של פונקציות פשוטות המתכנסות ל g . אזי בהכרח

$$h_n(x, y) = Q \cdot 1_{\{x \in [0,1]\}} \varphi_n(y) \text{ הינה סדרה של פונקציות פשוטות אשר מתכנסות ל } h \text{ . מכאן שעבור } C \text{ מהצורה } [0,1] \times B \text{ נקבל}$$

$$\int_C h(x, y) d\bar{\mu} = \int_C h_n(x, y) d\bar{\mu} = \sum_{i=1}^n Q m(E_n \cap B) c_n = Q \int_B g(y) dy$$

מכאן כי בסה"כ נקבל כי

$$\bar{v}(C) = \int_C h(x, y) \bar{\mu}$$

עבור כל C מהצורה המבוקשת, ולכן $\bar{v}(C) = \int_C h(x, y) \bar{\mu}$ עבור כל $C \in \mathcal{S}_1$ ומכאן כי

$$\frac{d\mu}{d\nu} \neq \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\nu}} \text{ קל לראות כי ניתן למצוא דוגמאות עבורן } \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\nu}} = h(x, y)$$

מסקנה: הנגזרת $\frac{d\mu}{d\nu}$ איננה תלויה רק במידות μ ו ν אלא גם בסיגמא אלגברה עליה הן מוגדרות.

1. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סיגמא סופיות כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ . תהי

$$\rho = \mu + \nu \text{ . שימו לב כי } \mu \ll \rho \text{ וגם } \nu \ll \rho \text{ . הוכיחו כי אם } f = \frac{d\mu}{d\rho} \text{ ו } g = \frac{d\nu}{d\rho} \text{ אזי}$$

$$\text{א. } f > 0 \text{ כב"מ } \mu \text{ .}$$

$$\text{ב. } f + g = 1 \text{ כב"מ } \rho \text{ .}$$

$$\text{ג. } d\nu = \frac{g}{f} d\mu \text{ .}$$

פתרון:

א. מהנתון כי $\nu \ll \mu$ נובע כי $\rho \ll \mu$. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי לכל A מדידה מתקיים

$$\mu(A) = \int_A f d\rho$$

נניח בשלילה ש f אינו מתקיים. אזי קיימת בהכרח קבוצה מדידה E כך ש $\mu(E) > 0$ וגם $f = 0$ על E . אבל אז $\mu(E) = \int_A f d\rho = 0$. בסתירה להנחה ש $\mu(E) > 0$.

ב. עפ"י משפט רדון ניקודים נובע כי $\mu(A) = \int_A f d\rho$ וגם כי $\nu(A) = \int_A g d\rho$ לכל A מדידה. מכאן שעבור כל A מדידה נובע כי

$$\begin{aligned} \int 1_A (f + g) d\rho &= \int 1_A f d\rho + \int 1_A g d\rho \\ &= \mu(A) + \nu(A) = \rho(A) = \int 1_A d\rho \end{aligned}$$

לכן נובע כי $f + g = 1$ כב"מ ρ .

ג. קודם כל נתחיל בהערה, ע"י קירוב של פונקציות פשוטות נראה כי אם $z(x)$ פונקציה מדידה אזי נובע כי אם $\int z d\nu < \infty$ וגם $\int z d\mu < \infty$ אזי $\int z d\mu = \int z f d\rho$ וגם $\int z d\nu = \int z g d\rho$. לכן נסמן לפעמים $dv = g d\rho$. עפ"י

משפט רדון ניקודים והנתון, נובע כי קיימת פונקציה חיובית h כך ש $\nu(A) = \int 1_A h d\mu$ מדידה. מצד שני

$$\begin{aligned} \int 1_A g d\rho &= \nu(A) = \int 1_A h d\mu = \\ \int 1_A h d\mu &= \int 1_A h f d\rho \end{aligned}$$

ומכאן ש כב"מ ρ $h = \frac{g}{f} \Leftarrow g = fh$.

תרגיל: יהיו X ו Y משתנים אקראיים ממשיים בעלי תוחלת μ_x ו μ_y בהתאמה. הראו כי

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_x \sigma_y$$

פתרון: נראה כי $E((X - \mu_x)(Y - \mu_y))$ הינה מכפלה פנימית.

$$\begin{aligned} E((X + Z - \mu_{x+z})(Y - \mu_y)) &= E((X + Z - \mu_x - \mu_z)(Y - \mu_y)) \\ &= E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) + E((Z - \mu_z)(Y - \mu_y)) \end{aligned} \quad .i$$

ברור כי .ii

$$E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) = E((Y - \mu_y)(X - \mu_x))$$

.iii $E((X - \mu_X)^2) \geq 0$ וגם אם $E((X - \mu_X)^2) = 0$ אזי עפ"י שיוויון מרקוב נובע כי

$$P(|X - \mu_X| > \lambda) \leq \frac{E(|X - \mu_X|^2)}{\lambda} = 0$$

כב"מ $(X - \mu_X) = 0$ ולכן $\lambda > 0$

מכאן שמתקיימות התכונות של מכפלה פנימית ולכן עפ"י א"ש קושי שוורץ

$$E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \leq \sqrt{E((X - \mu_X)^2)} \sqrt{E((Y - \mu_Y)^2)}$$
$$\Leftrightarrow |Cov(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$$