פתרון תרגיל 6 – אינפי' 1

1. הוכיחו/הפריכו:

a. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר

הוכחה:

$\sum b_n$ מתכנס ולכן $b_n \to 0$ ולכן $\frac{1}{b_n}$ לא מוגדר או לא חסום ובכל מקרה אינו שואף לאפס ולכן הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ בוודאי מתבדר.

b. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum {a_n}^2$ מתכנס

הוכחה:

$\sum a_n$ מתכנס ולכן $a_n \to 0$. ניקח $\varepsilon = 1$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon = 1$ ולכן ${a_n}^2 = |a_n|^2 = |a_n| \cdot |a_n| \le 1 \cdot |a_n| = |a_n|$ אבל $\sum a_n$ טור חיובי ולכן $|a_n| = a_n$ ולכן קיבלנו ${a_n}^2 \le a_n$ ושוב לפי מבחן ההשוואה $\sum {a_n}^2$ מתכנס.

<u>הערה:</u>

הראנו את היחס בין איברי הטורים רק עבור $n > n_0$, אבל בדומה לסדרות, שינוי מספר סופי של איברים לא משנה את התכנסות או התבדרות הטור (על אף שהוא יכול לשנות את סכומו של הטור).

2. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$

פתרון:

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים:

$$S_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots+\frac{3}{10^n}=3\left(\frac{\frac{1}{10}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\to\frac{1}{3}$$

שימו לב, באופן כללי ניתן להוכיח באופן דומה עבור $|q|<1$ שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}a_1q^n=\frac{a_1}{1-q}$.

3. חשבו את סכומי הטורים:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

פתרון: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$ לכן $A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)=1$

נציב $n=0,-1,-2$ ונקבל $A=\frac{1}{2},B=-1,C=\frac{1}{2}$ ולכן

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$. ננסה להבין איך נראים הסכומים החלקיים. נסמן $a_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$ ונסתכל על הסכום של 3 איברים עוקבים $a_{n-1}+a_n+a_{n+1}$. רואים ש $-\frac{1}{n+1}$ האיבר האמצעי של a_n מתאפס על ידי הסכום של האיבר השמאלי של a_{n+1} שהוא $\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2(n+1)}$ והאיבר הימני של a_{n-1} שהוא $\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2(n-1+2)}$ כי $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+2}$.

נסתכל על הסכום הכללי S_N, ונראה אילו איברים לא מתאפסים:

שני האיברים הראשונים של a_1 (האיבר השמאלי מאפס איברים קודמים שאינם, והאיבר האמצעי מתאפס על ידי איבר קודם שחסר). האיבר השמאלי של a_2 שלא מתאפס כי הוא אמור לאפס את האמצעי של a_1 שכבר דנו בו. בנוסף האיברים הימני והשמאלי של a_N אינם מתאפסים כי חסר a_{N+1}, ולכן גם האיבר הימני של a_{N-1} לא מתאפס כי האמצעי של a_N לא

התאפסה. סה"כ קיבלנו $S_N=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$. ולכן $S_N\to\frac{1}{4}$ כלומר סכום הטור הינו $\frac{1}{4}$.

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$

פתרון: $\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{A}{n+2}+\frac{B}{n+3}$

נמשיך בפתרון, $A(n+3)+B(n+2)=1$ נציב $n=-2,-3$ ונקבל $A=1,B=-1$ ולכן $\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n^2+5n+6}$. בסכום הכללי S_N רוב האיברים מתאפסים פרט לאיבר הראשון של a_1 ולאיבר האחרון של a_n ולכן $S_N=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$ ולכן $S_N\to\frac{1}{3}$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{3}$.

c. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

רמז: זכרו ש $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$, ודעו שאם $a_n\to 1$ אזי $\ln a_n\to 0$.

פתרון: $\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

$$S_N=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

לכן הרוב מצטמצם פרט ל $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=$

$1+\frac{1}{n+1}\to 1$ ולכן $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$ ולכן $S_N\to\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן סכום הטור הוא $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכיחו):

.a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

פתרון:
האיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר (לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות).

דרך נוספת:
נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים $S_1=-1, S_2=-1+1=0, S_3=-1, \ldots$. קל להוכיח באינדוקציה ש $\{S_n\}=-1,0,-1,0,-1,0,\ldots$, לכן לסדרת הסכומים החלקיים אינה מתכנסת ולכן לפי הגדרה הטור אינו מתכנס.

.b $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 3)^n}$

פתרון: לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{n^3}{(\ln 3)^n}}=\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\ln 3}\to\frac{1}{\ln 3}<1$ ולכן הטור מתכנס.

.c $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$

פתרון: לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\frac{2(n+2)}{(n+1)^2}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

.d $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

פתרון: לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\frac{1}{\ln n}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

.e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$

פתרון: לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}}=\frac{n(n+3)}{(n+2)^2}\to 1$ לא ניתן לפתור את השאלה בעזרת מבחן זה.

נשווה את הטור הנתון עם הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ (מבחן השוואה שני):

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ ולכן הטור מתבדר כמו הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$

פתרון: $\frac{1}{n^3+1}\le\frac{1}{n^3}$ ולפי מבחן ההשוואה הטור מתכנס.

g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^n}$ עבור $a>0$ קבוע.

פתרון: זהו טור חיובי לפי הנתון, ולכן לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}}=\frac{n+1}{a}\to\infty>1$

ולכן הטור מתבדר.

h. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

פתרון: קל לראות שזו סדרה מונוטונית יורדת לאפס חיובית, (כי גם n וגם $\ln n$ מונוטוניות עולות לאינסוף). לכן נפעיל את מבחן העיבוי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln(2^n)}$ מתכנס. אבל זה שווה ל $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln(2^n)}$ וזה מתבדר ולכן כך גם הטור המקורי.

בהצלחה!