תזכורת:

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית בין מרחבים וקטוריים.

1. הגרעין של T מסומן: $\ker T$, זהו תת־מרחב של התחום: $\ker T\leq V$ – קבוצת כל הוקטורים שתמונתם היא 0:

$$\ker T=\{v\in V|T\left(v\right)=0\}$$

2. התמונה של T מסומנת ImT, קבוצת כל התמונות של איברי V (בסימוני בדידה, $T\left[V\right]$):

$$ImT=\{T\left(v\right)|v\in V\}\leq W$$

ראינו שאם $\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V, אז: $ImT=sp\left\{T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right\}$.

משפט הדרגה:

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית בין מרחבים וקטוריים, אזי:

$$\dim V=\dim\ker T+\dim ImT$$

המימד של התחום שווה לסכום המימדים של הגרעין והתמונה.

הוכחה:

נסמן: $\dim V=n,\dim\ker T=k$, צ"ל: $\dim ImT=n-k$. במילים אחרות, להראות שבבסיס של ImT יש $n-k$ איברים.

$\dim\ker T=k$, כלומר בבסיס של הגרעין יש k איברים; אם כן, יהי $\{v_1,\ldots,v_k\}$ בסיס של $\ker T$, ונשלים אותו לבסיס של V:

$$\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\}$$

באמצעות $n-k$ וקטורים: $v_{k+1},\ldots v_n$. נשים לב שהוקטורים $v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n$ בת"ל (ופורשים את V).

כעת, לפי הטענה שהזכרנו, נקבל: $ImT=sp\left\{T\left(v_1\right),\ldots,T\left(v_k\right),T\left(v_{k+1}\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right\}$.

$T\left(v_1\right)=\ldots=T\left(v_k\right)=0$, כי $v_1,\ldots,v_k\in\ker T$. לכן: $ImT=sp\left\{T\left(v_{k+1}\right),\ldots,T\left(v_n\right)\right\}$.

עכשיו, נוכיח שהקבוצה $T\left(v_{k+1}\right),\ldots,T\left(v_n\right)$ בת"ל, ומכיוון שהיא גם פורשת נקבל שהיא בסיס לתמונה, ומכאן שאכן: $\dim ImT=n-k$. נניח בשלילה שהקבוצה תלויה ליניארית – קיימים סקלרים $\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n$, לא כולם שווים ל־$0$, כך ש:

$$\alpha_{k+1}T\left(v_{k+1}\right)+\ldots+\alpha_nT\left(v_n\right)=0$$

T העתקה ליניארית, ולכן: $T\left(\alpha_{k+1}v_{k+1}+\ldots+\alpha_nv_n\right)=0$. מכאן, $\alpha_{k+1}v_{k+1}+\ldots+\alpha_nv_n\in\ker T$.

$\left\{v_1,\ldots,v_k\right\}$ בסיס של הגרעין, ובפרט פורשת אותו; לכן, קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ עבורם:

$$\alpha_{k+1}v_{k+1}+\ldots+\alpha_nv_n=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_kv_k$$

מכאן: $-\alpha_1v_1-\ldots-\alpha_kv_k+\alpha_{k+1}v_{k+1}+\ldots+\alpha_nv_n=0$, וקיבלנו שהוקטורים: $\left\{v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\right\}$ תלויים ליניארית, בסתירה לכך שהם בסיס של V.

סה"כ, הקבוצה $T\left(v_{k+1}\right),\ldots,T\left(v_n\right)$ בת"ל ואכן: $\dim ImT=n-k$ כנדרש.

<u>הערה:</u>

המשפט מקביל למשפט הבא במטריצות: אם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, אז: $\dim N\left(A\right)+$

$\dim C(A) = n$.

<u>וקטור קואורדינטות:</u>

<u>טענה ־ יחידות ההצגה:</u>

יהי V מרחב וקטורי ויהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V. כל וקטור $v \in V$ אפשר להציג כצירוף ליניארי של איברי הבסיס, כלומר קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ המקיימים: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. זה נכון לכל קבוצה פורשת; מה מיוחד בבסיס? בבסיס, זו הדרך היחידה לעשות זאת – כל וקטור אפשר להציג **באופן יחיד** כצירוף ליניארי של איברי הבסיס.

<u>הוכחה:</u>

נניח ש: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ סקלרים, ונראה ש: $\beta_i = \alpha_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. אם כן, נעביר אגף ונקבל:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n - (\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = 0$$

כלומר:

$$(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0$$

מכיוון ש־$\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס, הוקטורים בת"ל ולכן כל הסקלרים שווים ל־0: $\alpha_i - \beta_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$, כלומר: $\alpha_i = \beta_i$ כנדרש.

גם הכיוון ההפוך הוא נכון – אם כל וקטור $v \in V$ אפשר להציג באופן יחיד כצירוף ליניארי של $\{v_1, \ldots, v_n\}$, אז $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V. נסביר. כל וקטור אפשר להציג כצירוף ליניארי של $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ולכן היא פורשת. נשאר להסביר בת"ל.

נניח בשלילה שהקבוצה תלויה ליניארית; לכן, קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

לא כולם שווים ל־0, עבורם: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. בה"כ, נניח ש־$\alpha_1 \neq 0$.
כעת, אפשר לרשום:

$$v_1 = 0 \cdot v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

ומצד שני:

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$$

ול־v_1 יש שתי הצגות שונות כצירוף ליניארי של איברי הקבוצה, בסתירה ליחידות ההצגה; לכן, הקבוצה אכן בת"ל ובסה"כ בסיס.

אפשר לשאול – באיזה מובן ההצגה היא יחידה? את הסדר של הוקטורים בצירוף אפשר להחליף:

$$(1,2) = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (0,1) = 1 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,1)$$

אם כן, כדי לדבר על הצגה יחידה, אנחנו צריכים סדר בין איברי הבסיס – מי הוקטור הראשון, מי השני וכן הלאה.
במילים אחרות, כדי לדבר על יחידות ההצגה ונושא הקואורדינטות שתכף נציג, אנחנו צריכים **בסיסים סדורים**, שיש סדר בין האיברים שלהם – אם אנחנו רושמים: $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אנחנו יודעים שהוקטור v_1 הוא הראשון בצירוף, וכן הלאה. אף על פי כן, נמשיך לסמן עם סוגריים מסולסלים ורק נאמר שהבסיס שהוא סדור. אכן, יש מקומות שבהם מסמנים בסיס סדור עם סוגריים עגולים: $B = (v_1, \ldots, v_n)$.

<u>קואורדינטות:</u>

יהי V מרחב וקטורי ויהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס סדור של V. לכל $v \in V$

קיימים סקלרים יחידים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ עבורם: $v=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$. **וקטור הקואורדינטות** של v ביחס לבסיס B מסומן: $[v]_B$, ואלו הסקלרים בצירוף הליניארי של v:

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

למשל: $V=\mathbb{R}^2, B=\{(1,1),(0,1)\}$, ו: $(1,2)=1\cdot(1,1)+1\cdot(0,1)$; הסקלרים הם $1,1$ ולכן:

$$[(1,2)]_B=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=(1,1)$$

בסיס אחר ייתן, כנראה, וקטור קואורדינטות אחר; למשל: $C=\{(1,0),(0,1)\}$, אז: $(1,2)=1\cdot(1,0)+2\cdot(0,1)$ ולכן:

$$[(1,2)]_C=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

וגם: $D=\left\{(1,2),\left(\sqrt{13},54\right)\right\}$, אז: $(1,2)=1\cdot(1,2)+0\cdot\left(\sqrt{13},54\right)$ ולכן:

$$[(1,2)]_D=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

<u>הערות:</u>

1. נשים לב שבדוגמה שלנו, הבסיס C מקיים: $[v]_C=v$. באופן כללי, בסיסים כאלו נקראים סטנדרטיים ונסמן אותם בדרך כלל ב־S או E. במילים אחרות, אם V מרחב וקטורי, הבסיס הסטנדרטי S הוא הבסיס המקיים: $[v]_S=v$, לכל $v\in V$. למשל: $V=\mathbb{R}_4[x]$, אז: $S=\{x^4,x^3,x^2,x,1\}$,

כי: $[ax^4+bx^3+cx^2+dx+e]_S=(a,b,c,d,e)$. בעצם, הנימוק הפורמלי מאחורי ה"תרגום" של פולינומים ומטריצות לוקטורים (לשים בעמודות ולדרג וכו') הוא וקטור קואורדינטות, כשאנחנו "מתרגמים", אנחנו מסתכלים על וקטור הקואורדינטות של הפולינום/מטריצה ביחס לבסיס הסטנדרטי המתאים; ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י: $T(v)=[v]_B$, היא איזומורפיזם. בדוגמה שלנו, $T:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}^5$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=\left[ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right]_S=(a,b,c,d,e)$$

היא איזומורפיזם. כמו שהסברנו, אם מרחבים הם איזומורפיים, אפשר לחשוב עליהם כעל אותו מרחב במילים שונות, ב"שפה" אחרת...

כבר נוכיח שזה אכן איזומורפיזם. הבסיסים הסטנדרטיים של המרחבים הנפוצים:

$$S=\{e_1,\dots,e_n\}\subseteq\mathbb{F}^n$$

$$S=\{x^n,\dots,1\}\subseteq\mathbb{F}_n[x]$$

$$S=\{E_{ij}|1\le i\le m,1\le j\le n\}\subseteq\mathbb{F}^{m\times n}$$

למשל:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\left[\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right]_S=(a,b,c,d)$$

2. ברמה הטכנית, בהינתן וקטור v ובסיס B, איך נמצא את וקטור הקואורדינטות $[v]_B$? נשים את איברי הבסיס B בעמודות מטריצה; הסדר חשוב - הוקטור הראשון של B בעמודה הראשונה וכו'. את הוקטור v נשים בעמודה הנוספת. אנחנו צריכים לפתור את המערכת כדי למצוא את הסקלרים המתאימים, ולכן נדרג קנונית ל-I; בעמודה הנוספת, נקבל את וקטור הקואורדינטות: $(B|\,v) \to (I|\,[v]_B)$.

למשל, נמצא את $[(x,y)]_B$ כאשר: $V=\mathbb{R}^2, B=\{(1,2),(3,4)\}$ לכל (x,y):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 4 & y \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -2 & y-2x \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}y+x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2x+\frac{3}{2}y \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}y+x \end{array}\right)$$

ולכן:

$$[(x,y)]_B = \left(-2x+\frac{3}{2}y, -\frac{1}{2}y+x\right)$$

כלומר:

$$(x,y) = \left(-2x+\frac{3}{2}y\right)\cdot(1,2) + \left(-\frac{1}{2}y+x\right)\cdot(3,4)$$

3. נדגיש את ההגדרה: אם $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ אז: $v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n \iff [v]_B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

<u>משפט:</u>

יהי V מרחב וקטורי, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V.

1. $[v]_B=0$ אם ורק אם $v=0$. כלומר, הוקטור היחיד שהקואורדינטות שלו הן 0 הוא וקטור ה־0.
2. $[v]_B=[w]_B$ אם ורק אם $v=w$. כלומר, וקטורים שווים אם ורק אם הקואורדינטות שלהם שוות.
3. $[\alpha v+w]_B=\alpha\,[v]_B+[w]_B$ (במילים אחרות: $T\left(v\right)=[v]_B$ היא העתקה ליניארית).
4. נסמן ב־$[V]_B$ את מרחב הקואורדינטות – קבוצת כל וקטורי הקואורדינטות לפי B של וקטורים מ־V:

$$[V]_B=\left\{[v]_B\,|v\in V\right\}$$

מתקיים: $V\cong[V]_B$, יש ביניהם העתקה ליניארית חח"ע ועל: $T\left(v\right)=[v]_B$.

<u>הוכחה:</u>

1. $[v]_B=0$ אם ורק אם $v=0\cdot v_1+\ldots+0\cdot v_n$ אם ורק אם $v=0$.
2. מצד אחד, אם $[v]_B=[w]_B$, נסמן: $[v]_B=[w]_B=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right)$ ואז – לפי הגדרת וקטור קואורדינטות – נקבל:

$$v=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n=w$$

מצד שני, אם $v=w$, לפי יחידות ההצגה גם: $[v]_B=[w]_B$.

3. נניח ש: $v=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n, w=\beta_1v_1+\ldots+\beta_nv_n$, כלומר: $[v]_B=\left(\alpha_1,\dots,\alpha_n\right),[w]_B=\left(\beta_1,\dots,\beta_n\right)$. נקבל:

$$\alpha v+w=\alpha\left(\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n\right)+\beta_1v_1+\ldots+\beta_nv_n$$

$$=\left(\alpha\alpha_1+\beta_1\right)v_1+\ldots+\left(\alpha\alpha_n+\beta_n\right)v_n\Longrightarrow[\alpha v+w]_B=\left(\alpha\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha\alpha_n+\beta_n\right)$$

כעת:

$$[\alpha v+w]_B=(\alpha\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha\alpha_n+\beta_n)=$$

$$=\alpha(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\ldots,\beta_n)=\alpha[v]_B+[w]_B$$

כנדרש.

4. לפי סעיף 3, אנו רואים שההעתקה היא אכן העתקה ליניארית:

$$T(\alpha v+w)=[\alpha v+w]_B=\alpha[v]_B+[w]_B=\alpha T(v)+T(w)$$

בסעיף 1, ראינו ש: $[v]_B=0$ אם ורק אם $v=0$, כלומר: $T(v)=0$ אם ורק אם $v=0$, כלומר: $\ker T=\{0\}$; לכן T חח"ע.

T על; לכל וקטור $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in[V]_B$, הוקטור: $v=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n\in V$ מקיים:

$$T(v)=[v]_B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

כלומר, לכל וקטור ב־$[V]_B$ יש מקור ב־V.

סה"כ, מצאנו העתקה ליניארית חח"ע ועל בין המרחבים $V,[V]_B$ ולכן הם איזומורפיים.

<u>הערה:</u>

אם $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V, כל וקטור מהבסיס אפשר לרשום כצירוף ליניארי של איברי הבסיס כך:

$$v_i=0\cdot v_1+\ldots+0\cdot v_{i-1}+1\cdot v_i+0\cdot v_{i+1}+\ldots+0\cdot v_n$$

ולכן: $[v_i]_B=e_i$ (1 במקום ה־i והשאר אפסים).

<u>מטריצת מעבר בין בסיסים:</u>

יהי V מרחב וקטורי, ויהיו: B,C בסיסים של V. יהי $v \in V$. מה הקשר בין $[v]_B$ ל־$[v]_C$? איך הוקטורים קשורים זה לזה?

מטריצת המעבר מ־B ל־C מסומנת: $[I]_C^B$, זו המטריצה היחידה המקיימת: $[I]_C^B [v]_B = [v]_C$, לכל $v \in V$. המטריצה מעבירה וקטור קואורדינטות לפי B לוקטור הקואורדינטות לפי C.

מי זו $[I]_C^B$? אם נסמן: $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, אז עמודות המטריצה $[I]_C^B$ הן וקטורי הקואורדינטות של איברי הבסיס B לפי הבסיס C, כלומר:

$$C_i\left([I]_C^B\right) = [v_i]_C\,, \quad [I]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C, & \ldots, & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לפני שנוכיח שזו המטריצה היחידה המקיימת: $[I]_C^B [v]_B = [v]_C$, ניתן דוגמה. לכן, אנחנו צריכים להבין איך מוצאים את $[I]_C^B$ ברמה טכנית. עמודות המטריצה הן הוקטורים של B לפי C, ולכן (לפי הדרך שלנו למציאת וקטורי קואורדינטות), נשים את איברי הבסיס C בעמודות ומימין להם את איברי הבסיס B עמודות; נדרג את איברי C קנונית ל־I ומה שנקבל מימין זו מטריצת המעבר, כלומר: $(C|\,B) \to \left(I|\,[I]_C^B\right)$.

למשל: $V = \mathbb{R}^2, B = \{(1,2)\,,(3,4)\}\,, C = \{(1,1)\,,(0,1)\}$. לפי מה שהסברנו:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

הגענו משמאל ל־I, ולכן המטריצה מימין היא מטריצת המעבר: $[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; נבדוק שהיא אכן כזו - נראה: $[I]_C^B [v]_B = [v]_C$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$.

כדי לעשות זאת, אנחנו צריכים למצוא את $[v]_B\,, [v]_C$ לכל v...

ביחס ל־B כבר מצאנו בדוגמה קודמת: $[(x,y)]_B = \left(-2x+\frac{3}{2}y, -\frac{1}{2}y+x\right)$.

כדי למצוא קואורדינטות לפי C, נשים את (x,y) מימין ל־C ונדרג קנונית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \end{array}\right)$$

ולכן: $[(x,y)]_C = (x, y-x)$, ואפשר לבדוק:

$$[I]_C^B [v]_B = [v]_C \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x+\frac{3}{2}y \\ -\frac{1}{2}y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}$$

אחרי הדוגמה נחזור להוכחה – נוכיח שמטריצת המעבר מקיימת: $[I]_C^B [v]_B = [v]_C$, והיא היחידה שעושה זאת.

נשתמש בכפל עמודה־עמודה: $C_i(AB) = AC_i(B)$, ובנוסף לכך:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1(A) + \ldots + x_n C_n(A)$$

ראשית, נראה שהיא יחידה. תהי A מטריצה המקיימת: $A[v]_B = [v]_C$ לכל $v \in V$, ונראה ש: $A = [I]_C^B$. בפרט, עבור וקטורי הבסיס B מתקיים: $A[v_i]_B = [v_i]_C$. כעת:

$$C_i(A) = Ae_i = A[v_i]_B = [v_i]_C$$

קיבלנו שעמודות A הן וקטורי הבסיס B לפי C, וזו בדיוק $[I]_C^B$.

שנית, נראה שאכן: $[I]_C^B [v]_B = [v]_C$, לכל v. נסמן: $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

כלומר: $v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$. לכן:

$$[I]_C^B\,[v]_B=[I]_C^B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha_1 C_1\left([I]_C^B\right)+\ldots+\alpha_n C_n\left([I]_C^B\right)=$$

$$=\alpha_1\,[v_1]_C+\ldots+\alpha_n\,[v_n]_C$$

לפי המשפט הקודם, אפשר "להכניס" חיבור וכפל בסקלר לתוך הקואורדינטות, כלומר:

$$\alpha_1\,[v_1]_C+\ldots+\alpha_n\,[v_n]_C=[\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n]_C=[v]_C$$

וסה"כ: $[I]_C^B\,[v]_B=[v]_C$, כנדרש.

<u>מסקנה:</u>

אם אנחנו רוצים להוכיח ש: $A=[I]_C^B$, מספיק להוכיח ש: $A\,[v]_B=[v]_C$ לכל $v\in V$.

<u>תכונות:</u>

1. אם S סטנדרטי, אז: $[v]_S=v$. לכן, את השוויון: $[I]_C^S\,[v]_S=[v]_C$ אפשר לרשום: $[I]_C^S\,v=[v]_C$.
2. כמו כן, $[I]_S^B$ היא המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים של B לפי S; אבל הוקטורים לפי S הם הוקטורים המקוריים, ולכן עמודות המטריצה $[I]_S^B$ הן פשוט הוקטורים של B. המטריצה הזו מקיימת: $[I]_S^B\,[v]_B=[v]_S=v$.
3. $[I]_B^B=I$.
4. $[I]_C^B=\left([I]_B^C\right)^{-1}$.

5. $[I]_D^C\,[I]_C^B = [I]_D^B$.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח את $4,5$. נתחיל מ־5. כדי להראות ש: $[I]_D^C\,[I]_C^B = [I]_D^B$, מספיק להראות: $\left([I]_D^C\,[I]_C^B\right)[v]_B = [v]_D$. אם כן:

$$\left([I]_D^C\,[I]_C^B\right)[v]_B = [I]_D^C\left([I]_C^B\,[v]_B\right) = [I]_D^C\,[v]_C = [v]_D$$

כמו שרצינו. כעת, נוכל להסביר בקלות את 4:

$$[I]_B^C\,[I]_C^B = [I]_B^B = I$$

המכפלה שווה ל־I, ולכן הן הופכיות אחת של השניה: $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$.

<u>מסקנה טכנית:</u>

מתקיים: $[I]_C^B = [I]_C^S\,[I]_S^B = \left([I]_S^C\right)^{-1}[I]_S^B$. את המטריצות $[I]_S^B\,,[I]_S^C$ קל למצוא – פשוט רושמים בעמודות את איברי הבסיסים. ולכן, כדי למצוא את מטריצת המעבר מ־B ל־C, אפשר למצוא את ההופכית של מטריצת המעבר מ־C ל־S (פשוט C בעמודות) ולכפול אותה במטריצת המעבר מ־B ל־S (פשוט B בעמודות).

<u>מטריצה מייצגת העתקה:</u>

תהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית בין מרחבים וקטוריים, ויהיו $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ בסיס של W. המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי הבסיסים B, C מסומנת: $[T]_C^B$; זו המטריצה היחידה המקיימת: $[T]_C^B\,[v]_B = [T(v)]_C$. איך $[T]_C^B$ מוגדרת? עמודותיה הן

התמונות של איברי B לפי C, כלומר:

$$C_i\left([T]_C^B\right)=[T\left(v_i\right)]_C\,,\quad [T]_C^B=\begin{pmatrix} | & & | \\ [T\left(v_1\right)]_C, & \ldots, & [T\left(v_n\right)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

כמו מטריצת המעבר, רק עם T...