חשבון אנפיניטסמלי לפיסקאים 1

מבחן, מועד א, סמ׳ א, תשנ׳ט, 14/2/01

פרופ׳ י.אהרונסון, פרופ׳ ו. מצאייב

הנחיות:

זמן המבחן: שלש שעות. ענה על שאלה מס׳ 1, ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא שימוש בכל חומר עזר פרט לדף הנוסחאות המצורף. מותר להעזר במחבון כיס ללא יכולת גרפית. הוכח את תשובותיך.

הפרך

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
   א. (7 נק׳) אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $a_n \to 0$.
   ב. (8 נק׳) אם $f:[0,1]\to I\!R$ רציפה, אזי לכל $\epsilon>0$ ולכל $\delta>0$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ כאשר $x,y\in(0,1)$ ו- $|x-y|<\delta$.
   ג. (8 נק׳) הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ מתכנס לכל $|x|\le 1$.
   ד. (8 נק׳) $e^{-\frac{1}{x^3}} \underset{x\to 0,\ x<0}{\longrightarrow} 0$.

2.
   א. מצא $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x - x}{\sin x - 2x}$.
   ב. חשב $\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n$.

3.
   א) הוכח כי $\ln|x|<x^4$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
   ב) הוכח כי למשוואה $x^4-\ln|x|=2$ יש 4 פתרונות בדיוק.

4. יהיה $f(x):=\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}$ עבור $x>0,\ x\ne 1$.
   א) מצא $f(0)$ כך ש-f תהיה רציפה ב-1.
   ב) האם f (כפי שמוגדר בסעיף א) תהיה גזירה ב-1?

5.
   א. מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$.
   ב) בדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+n}{4^n}$.

6. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(1)>f(0)+1$ ו- $f'(0)=f'(0)=1$.
   א. הוכח כי קיים $c\in(0,1)$ כך ש-$f'(c)>0$.
   ב) הוכח כי קיימות $0<d_1<d_2<1$ כך ש-$f''(d_1)<0<f''(d_2)$.
   ג) האם ל-f נקודת פיתול ב-$(0,1)$?

קיים

בהצלחה!!!

חשבון אנפיניטסמלי לפיסקאים 1

מבחן, מועד ב, סמ׳ א, תשס׳א, 30/8/01

פרופ׳ י.אהרונסון

זמן המבחן: שלש שעות.

הנחיות:

ענה על שאלה מס׳ 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא שימוש בכל חומר עזר, פרט לדף הנוסחאות המצורף. הוכח את תשובותיך. מותר להעזר במשחבון כיס ללא יכולת גרפית.

.1 הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) (5 נק׳) אם $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה חסומה, אזי קיים $x \in A$ כך ש- $x \geq y$ לכל $y \in A$.

ב) (5 נק׳) אם $f : [0,1] \to I\!R$ רציפה, אזי קיים $x \in [0,1]$ כך ש- $f(x) = 0$.

ג) (5 נק׳) $\frac{d^3}{dx^3}\cos(2\arccos x) \equiv 0$ עבור $|x| \leq 1$.

ד) (5 נק׳) $e^{\frac{1}{x^3}} \underset{x\to 0,\ x<0}{\longrightarrow} 0$.

.2 (20 נק׳)

א) הוכח כי אם $x > 1$, אזי $1 < \frac{3}{5}x + \frac{2}{5x} < x$.

עבור $x > 0$, נגדיר את הסידרה $a_1(x), a_2(x), \ldots$ ע״י $a_1(x) = x$ ו- $a_{n+1}(x) := \frac{3}{5}a_n(x) + \frac{2}{5a_n(x)}$.

ב) יהיה $x > 1$. הוכח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ והשב אותו.

ג) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{1}{3})$?

.3 (20 נק׳)

הוכח כי קיימים 3 שורשים בדיוק למשוואה $\ln|x| = x^{\frac{1}{3}}$.

.4 (20 נק׳)

א) יהיה $f(x) := (1-x)^{\frac{1}{3}}$ עבור $x \neq 1$. השב את $f^{(n)}(0)$ לכל $n \geq 1$ ומצה את רדוס ההתכנסות R של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$.

ב) הוכח כי $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ עבור $|x| < 1$.

.5 (20 נק׳)

יהיה $f(x) := \frac{e^x - 1}{x}$ כאשר $x \neq 0$.

א) מצא את $f(0)$ כך ש-f תהיה רציפה ב-0.

ב) האם f (כפי שמוגדר בסעיף א) תהיה גזירה ב-0?

.6 (20 נק׳)

הוכח כי אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $A > 0$, קיים $B > 0$ כך ש- $|f(x) - f(y)| \leq B$ עבור $y \in \mathbb{R}$, $|y - x| < A$.

רמז: זהירות!

בהצלחה!!!

אוניברסיטת תל-אביב,
הפקולטה למדעים מדויקים,
ע"ש ראיימונד ובברלי סאקלר.

כ"ד באדר תשנ"ט,
12.3.1999
מועד א', סמסטר א'.

מבחן בחשבון דיפרנציאלי
לתלמידי פיסיקה שנה א'.

המורים: פרופ' מיכאל סודין,
פרופ' דוד סודרי.

משך המבחן: 3 שעות.
מותר להשתמש במחשבון.
השמוש בחומר עזר אחר, אסור.

על כל תשובה להיות מנומקת היטב ובקצרה, ע"י ציטוט משפטים מתאימים, תוך כדי הקפדה על כתב ברור ומסודר.

א. ענה על שלוש מתוך השאלות 1 - 4.

1. נגדיר את הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא.

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

א. הוכח כי הסדרה מתכנסת, ומצא את גבולה.

ב. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

2. בדוק את התכנסות הטורים הבאים.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

3. חשב שנים מתוך שלושת הגבולות הבאים.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{\mu}{1-x^{\mu}} - \frac{\upsilon}{1-x^{\upsilon}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$$

הפוך!

4. א. מצא את התחומים בהם הפונקציה הבאה רציפה, גזירה, וכן את התחום בו הנגזרת רציפה.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 \quad , & x = 0 \end{cases}$$

ב. מצא את הנגזרת מסדר 31 של הפונקציה

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

ב. ענה על <u>אחת</u> מתוך השאלות 5 – 6.

5. א. נתונה פונקציה $f(x)$, אשר אינה חסומה מלעיל בקטע [0,1]. הוכח כי קימת סדרה מתכנסת $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, מוכלת בקטע [0,1] , כך ש

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \; .$$

ב. הראה שהפונקציה הבאה חסומה, ומצא לה חסם עליון (supremum) וחסם תחתון (infimum).

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad , \qquad 0 < x < \infty$$

האם יש לפונקציה (בתחום הנ"ל) מכסימום, או מינימום ? אם כן, מצא את הנקודות בהן הם מתקבלים.

6. נתונים חמישה מספרים ממשיים שונים $a,\ b,\ c,\ d,\ e$. מצא סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך שקבוצת הגבולות החלקיים שלה היא בדיוק $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$.

<u>בהצלחה!</u>