קבוצות פתוחות וסגורות

תזכורת

יהי $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. נסמן ב$B(a,r)$את הכדור הפתוח ב$\mathbb{R}^n$ שמרכזו a ורדיוסו r. הכוונה $B_r(a) := \{x | d(x,a) < r\}$

באופן דומה נסמן $\bar{B}(a,r)$ את הכדור הסגור ב$\mathbb{R}^n$ שמרכזו a ורדיוסו r. נדגיש שבמקרה זה הכוונה $B_r(a) := \{x | d(x,a) \leq r\}$

הגדרה

- A קבוצה חלקית ל$\mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{R}^n$. x נקודה פנימית של A אם קיימת סביבה של x שמוכלת כולה בA.

  למשל ב$\mathbb{R}$ הכוונה לקטע, ב$\mathbb{R}^2$ הכוונה למלבן, ב$\mathbb{C}$ הכוונה למעגל.

- קבוצה A נקראת <u>קבוצה פתוחה</u> אם כל נקודה בA היא נקודה פנימית.

  למשל $[2,3]$ לא קבוצה פתוחה!(אפשר להוכיח זאת!)

תרגיל

הוכח כי הקבוצה $A = \{(x,y) | y > 0\}$ הינה קבוצה פתוחה.

פתרון

תהי (x_0, y_0) נקודה בA. נראה כי $B((x_0, \ddot{y_0}), y_0)$ מוכל בA.
במקרה שלנו לפי הגדרת נורמה:

$$B((x_0,y_0),y_0) \Leftrightarrow \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < y_0 \Rightarrow \|(x-x_0, y-y_0)\| < y_0$$

הערה: ברור שמתקיים $|a_i| \leq \|a_1, ... a_n\|$

כי: לדוגמה: $|a_i| \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_n^n}$. ב$\mathbb{R}^2$ - $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

במקרה שלנו ע"פ ההערה:

$$|y-y_0| \leq \|(x-x_0),(y-y_0)\| < y_0$$

$$\Downarrow$$

$$|y-y_0| < y_0$$

$$\Downarrow$$

$$0 < y < 2y_0$$

ז"א עבור הסביבה $0 < y < 2y_0$ נקבל כי הנקודה $(x,y) \in A$. מכאן ניתן להסיק כי $B\left(\left(x_0,y_0\right),y_0\right)$ מוכל ב-A.

תרגיל 2

הוכח כי הקבוצה $A = \{x_0\}$ אינה פתוחה.

הוכחה

נניח בשלילה כי הקבוצה פתוחה. לכן קיים כדור מהצורה $\exists \alpha > 0, B(x,\alpha) \subseteq A$ ולכן שם יש $x_0 \neq x_1 \in B(x,\alpha)$. נסיק $\Leftarrow x_1 \in A$. כמובן זוהי סתירה(יוצא שיש יותר מאיבר אחד בקבוצה).

שאלה

האם כל קבוצה היא בהכרח פתוחה או סגורה?

תשובה

לא! $2 < x \leq 3$ ב-$\mathbb{R}^1$.

הגדרה

A נקראת קבוצה חסומה, אם קיים Mכך שלכל $x \in A$, $|X| \subseteq M$

תרגיל 3

הוכח כי הקבוצה $A = \{(x,y) : x \geq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ אינה חסומה.

פתרון

נניח בשלילה כי הקבוצה A חסומה. ז"א קיים M כך שלכל $(x_0,y_0) \in A$ $\| (x_0,y_0) \| \leq$ $M$$\Leftarrow$ $\sqrt{x^2+y^2} \leq M$ $\Leftarrow$ $x^2+y^2 \leq M^2$$\Leftarrow$$x^2 \leq M^2 - y^2$.

נקבע את y(כי x למעשה "מרמז", על האי חסימות). נבחר לדוגמה $y = 1$(אכן נמצא בקבוצה). $x^2 \leq M^2 - 1$(*). אם נבחר $x = M+1$(אפשר עוד הרבה) ברור שמשוואה (*) אינה מתקיימת.

תרגיל 4

הוכח שכל כדור פתוח או סגור ב-$\mathbb{R}^n$ הינה קבוצה חסומה.

פתרון

נניח $x \in B\left(x_0,\alpha\right)$ צ"ל $\|x\| \le M$ ולכן $\|x - x_0\| \Leftrightarrow B\left(x_0,\alpha\right)$.
מעוניינים לחסום את $\|x\|$

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \le \|x - x_0\| + \|x_0\| < \|x_0\|$$

ולכן מספיק לבחור $M = \alpha + \|x_0\|$. במקרה זה ברור שמתקיים $\|x\| < M$

הגדרה(נקודת הצטברות)

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$
x תקרא נקודת הצטברות של A אם קיימת בA סדרת נקודות שונה מx_0 המתכנסת לx_0

למשל

עבור הקטע $[1,2]$ הסדרה $1 + \frac{1}{n} \to 1$. נדגיש כי $1 + \frac{1}{n} \in [1,2]$ וגם נקודת ההצטברות 1 שייכים לקטע.

עבור הקטע $[1,2)$ הסדרה $2 - \frac{1}{n}$ אכן נמצאת בקטע הנתון, נקודת ההצטברות היא 2 וברור שלא שייכת לקטע.

תרגיל 5

הוכח\הפרך: כל נקודות ההצטברות של A שייכות לA

תשובה

לא נכון: ראה דוגמה קודמת.

תרגיל 6

הוכח\הפרך: כל נקודה פנימית של A היא נקודת הצטברות.

פתרון

נכון

נניח שx_0 נקודה פנימית של A. קיים $\alpha > 0$ כך ש$B\left(\vec{x}_0,\alpha\right) \subseteq A$. נגדיר $\vec{x}_0 = (x_1, x_2, ...x_n)$ ונגדיר $\vec{x}_k = \left(x_1 + \frac{1}{k}, x_2, ...x_n\right)$ כאשר $\frac{1}{k} < \alpha$. נשים לב כי $\{x_k\} \subseteq B\left(x_0,a\right)$. במקרה זה ברור כי $\|x_k - x_0\| = \|\frac{1}{k}\| = \frac{1}{|k|} < \alpha$ כלומר $x_k \in B\left(x,\alpha\right)$.
בנוסף מתקיים $\lim x_k \to x_0$, לכן מצאנו סדרה שנמצאת בA ומתכנסת לx_0(שנמצא בכדור). ולכן כל נקודה היא נקודת הצטברות.

תרגיל 7

הוכח/הפרך: כל נקודה בA הינה נקודת הצטברות.

פתרון

נראה דוגמה נגדית - לדוגמה $[1,2]\cup\{3\}$. מספיק להראות כי "3" אינה נקודת הצטברות.
נניח בשלילה ש"3" היא כן נקודת הצטברות, ולכן קיימת סדרה x_k בA כך ש$\{x_k\} \to 3$.
אין סביבה לנקודה "3"(הנקודה "3" היא מבודדת) ולכן לא ייתכן שיש סביבה כזאת.
נסחו בצורה יפה בבית

חסימות

תזכורת

f חסומה מלעיל אם $\exists M \in \mathbb{R}$ כך ש$f(x) \leq M$. באופן דומה חסומה מלרע אם $f(x) \geq M$

תרגיל 8

הוכח כי $f(x,y) = x + y$ אינה חסומה ב$\mathbb{R}^2$.

פתרון

נניח בשלילה שf חסומה.

$$\|f\| \leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$\|f(x,y)\| \leq M$$

$$\Downarrow$$

$$\|f(x,0)\| \leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$|x+0| \leq M$$

$$|x| \leq M$$

ולכן נבחר $x = M+1$ ונקבל את הדרוש.

תרגיל 9

הוכח כי $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ אינה חסומה בתחום הגדרתה.

פתרון

תחום ההגדרה $|x|\neq|y|$. נניח בשלילה שf חסומה ע"י M.

$$|f(x,y)|\leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\left|x^2+y^2\right|}{\left|x^2-y^2\right|}\leq M$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|x^2+y^2\right|\leq M\left|x^2-y^2\right|$$

אפשרות I: $|x|>|y|$

$$x^2+y^2\leq Mx^2-My^2$$

$$y^2(1+M)\leq x^2(M-1)$$

אם נבחר $x=M+1$ נבחר את $y=M$. נבדוק:

$$M^2(1+M)\leq(M+1)^2(M-1)$$

$$M^2\leq M^2-1$$

אפשרות II $|x|>|y|$

עושים אותו רעיון...

קל לראות שהבחירה $x=M+1$, $y=M$ מובילה לסתירה.

תרגיל

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נתונה ע"י $f(x,y)=xy^2$. הוכח ע"י ההגדרה כי $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x,y)=0$

הוכחה

ע"פ ההגדרה, צריך להראות לכל $\epsilon > 0$ נמצא $\delta > 0$ כך שאם $\| (x, y) - (0, 0) \| < \delta$ אז $\| f (x, y) - 0 \| < \epsilon$

"קל לראות" שאם $\| (x, y) - (0, 0) \| < \delta \Leftarrow \| (x, y) \| < \delta$.

במקרה שלנו, נדרוש ש-$|x| < \delta$ וגם $|y| < \delta$. כאשר נציב ב-f:

$$\left| xy^2 \right| = |x| \, |y|^2 < \delta \delta^2 = \delta^3$$

ולכן מספיק לבחור $\sqrt[3]{\delta}\,\epsilon$ ונקבל את הדרוש.