

בוֹחַן ב' בְּקוּרְס תּוֹרַת הַחִבּוּרֹת 88-218 סמסטר א' תשפ"ב

הוראות יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור. אנא התחילו את הפתרון לכל שאלה בעמוד נפרד, וציינו את מספר השאלה בתחילת העמוד.

משך הבוחן: 90 דקות.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציין המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד (שאינן בו ממש צורך).

בהצלחה!

שאלה 1. (30 נק') ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שקיים מונומורפיזם $f: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \rightarrow S_{14}$.

ב. הפריכו שקיים אפימורפיזם $f: S_5 \rightarrow A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

שאלה 2. (36 נק') תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה. נזכיר כי המנרמל של H ב- G הוא

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

ושהוא תת-החבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית.

א. הוכיחו או הפריכו: אם H אבלית ולא טריוויאלית, אז $N_G(H)$ אבלית.

ב. חשבו את $N_{D_5}(N_{D_5}(\langle \sigma^2 \rangle))$, כאשר $D_5 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^5 = \tau^2 = \text{id}, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \rangle$.

ג. מצאו איבר $x \in D_5$ שעבורו $x \notin N_{D_5}(\langle x \rangle)$.

שאלה 3. (40 נק') תהי G חבורה סופית, ותהי $H, K \leq G$ תת-חבורות. נגדיר

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

א. תנו דוגמה לחבורה G ולתת-חבורות $H, K \leq G$ שעבורן HK אינה תת-חבורה של G .
(רמז: כדאי לבחור תת-חבורות שאינן נורמליות ב- G .)

ב. נגדיר פעולה של החבורה $H \times K$ על הקבוצה HK לפי $(h, k) * x = h x k^{-1}$ (אין צורך להוכיח שזו פעולה). חשבו את $\text{orb}(e_G)$ ואת $\text{stab}(e_G)$, והסיקו כי $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.