אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 7 - פתרון

1. יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ פולינום אי-פריק, ויהי $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול שלו. נניח שחבורת גלואה $Gal(E/\mathbb{Q})$ היא אבלית. הראו ש $E=\mathbb{Q}[a]$ לכל שורש $a\in E$ של $f(x)$. (רמז: התבוננו ב $Gal(E/\mathbb{Q}[a])$).
פתרון: $Gal(E/\mathbb{Q}[a])\le Gal(E/\mathbb{Q})$. בנוסף כיוון ש $Gal(E/\mathbb{Q})$ אבלית, נקבל $Gal(E/\mathbb{Q}[a])\triangleleft Gal(E/\mathbb{Q})$. לפי התאמת גלואה נקבל ש $\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה, אך כיוון שזאת מכילה שורש של $f(x)$ היא חייבת להכיל את כל שרשיו (כיוון שזה אי-פריק), ולכן $\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q}$ הוא שדה פיצול של $f(x)$, ולכן בהכרח $E=\mathbb{Q}(a)$.
2. יהי $F/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול של פולינום אי-פריק $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$. הראו שאם $[F:\mathbb{Q}]$ אי-זוגי אזי ל $f(x)$ יש רק שורשים ממשיים.
פתרון: נניח שיש ל $f(x)$ שורש מרוכב, אזי הצמדה מרוכבת היא אוטומורפיזם מסדר 2 בחבורת גלואה, אבל $[F:\mathbb{Q}]=\left|Gal(F/\mathbb{Q})\right|$ ולכן (לפי משפט לגרנג') $2\,|\,[F:\mathbb{Q}]$.
3. פרקו את $x^{10}-1$ לגורמים אי-פריקים, ומצאו מהפירוק את Φ_{10} הפולינום הציקלוטומי (שהוא הפולינום המינימלי של $\rho_{10}=cis\dfrac{2\pi}{10}$). מצאו את חבורת גלואה של שדה הפיצול של Φ_{10}.
פתרון: $x^{10}-1=(x^5-1)(x^5+1)$. הגורם (x^5-1) הוא $(x-1)\Phi_5$. לכן בהכרח $\Phi_{10}\,|\,(x^5+1)$. אבל (x^5+1) פריק, כיוון ש -1 הוא שורש. $(x^5+1)=(x+1)(\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)$. הפולינום $f(x)=(\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)$ אי-פריק כי

$$\begin{aligned} f(x+1)&=(\mathrm{x}-1)^4-(\mathrm{x}-1)^3+(\mathrm{x}-1)^2-(\mathrm{x}-1)+1=\\ &\left(\mathrm{x}^4-4\mathrm{x}^3+6\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+1\right)-\left(\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}-1\right)\\ &+\left(\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+1\right)-\left(\mathrm{x}-1\right)+1=\mathrm{x}^4-5\mathrm{x}^3+10\mathrm{x}^2-10\mathrm{x}+5. \end{aligned}$$

וזה אי-פריק לפי איזנשטיין. אם כך קיבלנו ש $f(x)=(\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1)$ הוא פולינום אי-פריק.
לכן הפירוק הוא $x^{10}-1=(x-1)\cdot\Phi_5\cdot(x+1)\cdot f(x)$.
ובהכרח מתקיים ש ρ_{10} הוא שורש של $f(x)$ (כיוון שאינו שורש של אף גורם אחר), ולכן $\Phi_{10}=f$.
4. מצאו את הגורמים האי-פריקים של הפולינום x^8-x והסיקו שיש רק 2 פולינומים אי-פריקים מדרגה 3 מעל $\mathbb{Z}_2$.
פתרון: כל פולינום אי-פריק מדרגה 3 מתפצל מעל שדה הפיצול של x^8-x: כיוון ששדה הפיצול הוא שדה עם 8 איברים (ראינו בתרגול), וכל השדות עם 8 איברים איזומורפיים, ואם מוסיפים שורש של הפולינום האי-פריק ל $\mathbb{Z}_2$ מקבלים שדה הרחבה מדרגה 3, כלומר שדה עם 8 איברים.
כיוון שפולינום אי-פריק $f(x)$ מעל $\mathbb{Z}_2$ בהכרח ספרבילי, נקבל שבהכרח $f(x)\,|\,x^8-x$ (כיוון ששרשי x^8-x הם כל האיברים בשדה).
(את כל הנ"ל כבר ראינו בתרגול בצורה יותר כללית).

$$x^8 - x = x(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = \\ = x(x-1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1).$$

שני הגורמים האחרונים הם אי-פריקים (ניתן לראות שאין להם שורשים מעל $\mathbb{Z}_2$).

לפי ההסברים בתחילת הפתרון נקבל ש $(x^3+x+1),(x^3+x^2+1)$ הם הגורמים האי-פריקים היחידים מדרגה 3.

5. הראו שאם בשדה סופי ממאפיין $p>0$ האיבר $a \in E$ הוא יוצר של E^*, אזי $E^* =< \sigma(a) >$ לכל $\sigma \in Gal(E/\mathbb{Z}_p)$.

פתרון: כל אוטומורפיזם של שדות של $E/\mathbb{Z}_p$ הוא אוטומורפיזם של החבורה הציקלית E^* ולכן בהכרח תמונת יוצר היא יוצר.

6. מצאו את חבורת גלואה של שדה הפיצול של x^3-2 מעל $\mathbb{Z}_{11}$ ומעל $\mathbb{Z}_7$.

פתרון: לפולינום x^3-2 יש שורש יחיד ב $\mathbb{Z}_{11}$ והוא 7, לכן $x^3-2 = (x-7)(x^2+7x+5)$. הגורם השני אי-פריק (כי אין שורשים אחרים ב $\mathbb{Z}_{11}$ ל x^3-2). חבורת גלואה היא אם כך $\mathbb{Z}_2$.

לפולינום x^3-2 אין שורשים ב $\mathbb{Z}_7$, ולכן הוא אי-פריק. נוסיף שורש של הפולינום ל $\mathbb{Z}_7$, ונקבל הרחבה $F=\mathbb{Z}_7(a)/\mathbb{Z}_7$ מדרגה 3. מדובר בשדה מגודל $7^3=343$. לשדה F קיים איבר פרימיטיבי, כלומר $F^* =< b >$, ומתקיים $b^{342}=1$. אם כך $\left(b^{114}\right)^3=1$, כלומר קיים שורש שלישי פרימיטיבי של היחידה ב F, נסמנו ב ρ_3. אם כך $a,\rho_3 a,\rho_3{}^2 a \in F$ ולכן F שדה פיצול של הפולינום. כיוון שההרחבה היא מדרגה 3, נקבל שחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}_3$.