תורת המספרים האלגברית (88798)
תרגיל 2

1. יהי A תחום דדקינד. יהיו $I,J \triangleleft A$ אידאלים. נגיד כי I מחלק את J, ורושמים $I|J$, אם קיים אידאל $I' \triangleleft A$ כך ש־ $II' = J$. הוכח כי $I|J$ אם ורק אם $J \subseteq I$.

2. יהי K שדה מספרים ויהי $0 \neq I \triangleleft \mathcal{O}_K$ אידאל. יהי $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ בסיס שלם של K, ויהיו $\beta_1, \ldots, \beta_n \in I$ בסיס של I כמודול מעל $\mathbb{Z}$:

$$I = \mathbb{Z}\beta_1 + \cdots + \mathbb{Z}\beta_n.$$

יהיו $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ השלמים המקיימים $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\alpha_j$ ותהי C המטריצה (c_{ij}). נגדיר $N(I) = |\mathcal{O}_K/I|$. הוכח כי $N(I) = |\det C|$.

3. יהי $y \in \mathcal{O}_K$. הוכח כי $N(y\mathcal{O}_K) = |N_{K/\mathbb{Q}}(y)|$.

4. יהי K שדה מספרים ויהי $(0) \neq P \triangleleft \mathcal{O}_K$ אידאל ראשוני.

(א) יהי $e \in \mathbb{N}$. הוכח כי $P^e \neq P^{e+1}$.

(ב) יהי $a \in P^e \setminus P^{e+1}$. הוכח שהמחלקה $a + P^{e+1}$ הינה בסיס של P^e/P^{e+1} כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathcal{O}_K/P$.

(ג) הוכח כי $N(P^e) = N(P)^e$ לכל $e \in \mathbb{N}$.

(ד) בעזרת משפט השאריות הסיני, הוכח שאם $I,J \triangleleft \mathcal{O}_K$ אידאלים לא־אפסיים ללא גורם ראשוני משותף, אזי $N(IJ) = N(I)N(J)$.

(ה) הוכח שאם $I,J \triangleleft \mathcal{O}_K$ אידאלים לא־אפסיים, אזי $N(IJ) = N(I)N(J)$.

5. יהי p מספר ראשוני. יהי $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. בתרגיל הבית הראשון הוכחנו כי $\mathcal{O}_K$ הינו החוג $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ של השלמים של גאוס. ידוע שהחוג הזה הינו תחום ראשי: בקורס של חוגים הוכחנו שהוא תחום איקלידי ולכן תחום ראשי, ואחרי פסח נוכיח שהוא תחום ראשי בשיטות של הקורס שלנו.

הוכח שהאידאל $p\mathcal{O}_K$ הינו ראשוני אם ורק אם לא קיימים $a,b \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים $p = a^2 + b^2$.

6. יהי $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ ויהי $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(א) הוכח כי

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

הינם שני פירוקים שונים של 6 שאינם שווים עד כדי מכפלות באיברים הפיכים.

(ב) הוכח שהאידאלים הבאים של $\mathcal{O}_K$ הינם ראשוניים:

i. $P_1 = (2, 1+\sqrt{-5})$

ii. $P_2 = (3, 1+\sqrt{-5})$

iii. $P_3 = (3, 2+\sqrt{-5})$.

(ג) הוכח כי $6\mathcal{O}_K = P_1^2 P_2 P_3$.

(ד) איך ניתן להסביר את הפירוקים השונים של 6 בסעיף הראשון לאור הפירוק של $6\mathcal{O}_K$ למכפלה של אידאלים ראשוניים?

7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל הממשיים. נבחר בסיס $(v_1, \ldots, v_n)$ ואז נוכל לזהות $V \simeq \mathbb{R}^n$ ולהנות מן המידה הרגילה על $\mathbb{R}^n$.

הוכח ששריג $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ הינו שלם אם ורק אם קיימת קבוצה חסומה $\Phi \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש־ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\Phi + \gamma)$.

8. יהיו $r, s \geq 0$ ויהי $n = r + 2s$. יהי $t > 0$ מספר ממשי, ונגדיר קבוצה $X_t \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$X_t = \left\{ (x_1, \ldots, x_r, y_1, z_1, \ldots, y_s, z_s) : |x_1| + \cdots + |x_r| + \sqrt{y_1^2 + z_1^2} + \cdots + \sqrt{y_s^2 + z_s^2} < t \right\}.$$

הוכח כי X_t סימטרית וקמורה וכי

$$\mathrm{vol}(X_t) = \int_{X_t} 1 \cdot dx_1 \cdots dz_s = \frac{2^{r-s} \pi^s t^n}{n!}.$$

התרגיל הזה באינפי יהיה צעד בהוכחה של הסופיות של החבורת המחלקות Cl_K. רמז: אינדוקציה על r.

9. הוכח את מה שרבי לוי בן גרשום באמת הוכיח: אם $a, b > 1$ מקיימים $3^a - 2^b = \pm 1$, אזי $(a, b) = (2, 3)$.

הטענה מן השאלה האחרונה בתרגיל הבית הראשון גם נכונה, אך מאתגרת יותר.