פתרון תרגיל 4 - אינפי 2

שאלה 0.1. תהי f חסומה בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי f אינטגרבילית אם"ם לכל $\epsilon > 0$ יש חלוקות P,Q כך ש $\overline{s}(P) - \underline{s}(Q) < \epsilon$.

פתרון. נסמן $\overline{I} = \inf\{\overline{s}(P) \mid P\}$ ו $\underline{I} = \sup\{\underline{s}(P) \mid P\}$. נזכר ש$f$ אינטגרבילית אם"ם היא חסומה ו$\overline{I} = \underline{I}$.

$\Leftarrow$ מהגדרת sup ו inf קיימות חלוקות P ו Q כך ש

$$\begin{aligned} \overline{I} &> \overline{s(P)} + \epsilon/2 \\ \underline{I} &< \underline{s}(Q) - \epsilon/2 \end{aligned}$$

מחיסור האי-שיוויונים והעברת אגפים נקבל ש $\overline{s}(P) - \underline{s}(Q) < \epsilon$ כדרוש.

$\Rightarrow$ עבור $\epsilon > 0$ נקח חלוקות P,Q כמו בנתון. מכיוון ו $\overline{I} \leq \overline{s}(P)$ ו $\underline{I} \geq \underline{s}(Q)$ אזי $\overline{I} - \underline{I} \leq \overline{s}(P) - \underline{s}(Q) < \epsilon$.

מכיוון שזה נכון לכל $0 < \epsilon$ אז בעצם קיבלנו $\overline{I} = \underline{I}$.

שאלה 0.2. עבור קטע סגור $[a,b]$ וסדרת חלוקות שלו $\{T_n\}$ המקיימת ש $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$ (כאשר $\lambda(T_n)$ הוא פרמטר\נורמת החלוקה), הוכיחו כי מתקיים שלכל פונקציה f אינטגרבילית בקטע

$$\lim_{n\to\infty} \overline{s}(T_n) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{s}(T_n)$$

פתרון. תהי f אינטגרבילית בקטע, אזי $\int_a^b f(x)dx = \overline{I} = \underline{I} = \alpha$. עבור $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P כך ש $\lambda(P) < \delta$ מתקיים $|\overline{s}(P) - \alpha| < \epsilon$.

מכיוון ו$\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ $\lambda(T_n) < \delta$ ולכן $|\overline{s}(T_n) - \alpha| < \epsilon$ שזה בדיוק אומר ש$\lim_{n\to\infty} \overline{s}(T_n) = \int_a^b f(x)dx$.

ההוכחה עבור $\lim_{n\to\infty} \underline{s}(T_n)$ היא באותו האופן.

הערה. למעשה, פונקציה חסומה בקטע המקיימת שלכל סדרת חלוקות $\{T_n\}$ המקיימת ש $\lim_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$ קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sigma(f, T_n, *)$ היא אינטגרבילית.

הערה. זאת אפילו הייתה ההגדרה המקורית של רימן לאינטגרביליות.