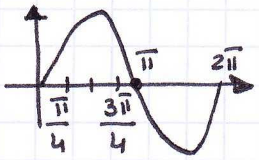
פתרון תרגיל 8

שאלה 1

(א) הסדרה $\left\{\sqrt[n]{\sin x}\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.



פתרון:

אם $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, אז $\sin x>0$

ולכן לכל x כזה מתקיים:

$$f_n(x)=\sqrt[n]{\sin x}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

הפונק' $f_n(x)$ רציפות בקטע הנתון ומתקיים:

$$f_{n+1}(x)=\sqrt[n+1]{\sin x}\geq\sqrt[n]{\sin x}=f_n(x)$$

גם פונק' הגבול שמצאנו רציפה בקטע הנתון ולכן מתקיימים תנאי משפט דיני (ראה את המשפט בתחתית העמוד) ואנו מסיקים שהסדרה $\sqrt[n]{\sin x}$ מתכנסת ל- 1 במ"ש בקטע $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

(ב) הסדרה $\left\{\sqrt[n]{\sin x}\right\}$ בקטע $(0,\pi)$.

הערה: לא ניתן להשתמש במשפט דיני, מכיוון שלא מדובר בקטע סגור!.

נשלול את ההתכנסות במ"ש באופן הבא:

$$\sup_{x\in(0,\pi)}\left|f_n(x)-\underbrace{1}_{\text{פונק' גבול (ראה סעיף א')}}\right|=\sup_{x\in(0,\pi)}\left|\sqrt[n]{\sin x}-1\right|=1\neq0$$

(ג) הסדרה $\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $(0,\infty)$.

פתרון:

$$\sup_{x\in(0,\infty)}\left|f_n(x)-\underbrace{0}_{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}=0}\right|=\sup_{x\in(0,\infty)}\frac{1}{1+n^2x^2}=1$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

משפט דיני: תהי $\{f_n\}$ סדרת פונק' רציפות, המוגדרות בקטע סגור $[a,b]$, המתכנסות נקודתית ל- f. אם $\{f_n\}$ היא סדרה עולה, כלומר $f_{n+1}\geq f_n$ $\forall n$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במ"ש בקטע $[a,b]$.

פתרון שאלה 2:

לכל x ממשי מתקיים $|a_n \cos nx| \le |a_n|$, $|a_n \sin nx| \le |a_n|$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס לפי הנתון ולכן ממבחן ההשוואה של

וירשטראס נקבל כי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$

מתכנסים במ"ש בכל הישר.

פתרון שאלה 3:

לכל $-1<x<1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ מתכנס.

נוכיח כי עבור $0<a<1$ הטור מתכנס במ"ש ב- $[-a,a]$.

לכל $|x| \le a$ מתקיים: $|nx^{n-1}| \le na^{n-1}$

מאחר שהטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ מתכנס (אם $0<a<1$) נקבל

ממבחן וירשטראס כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ מתכנס במ"ש בקטע $[-a,a]$.

כעת נוכיח כי בקטע $(-1,1)$ הטור הנתון אינו מתכנס במ"ש.

נשים לב, כי לכל $m>n\ge 1$ ולכל $x>0$ מתקיים:

$$\sum_{k=n+1}^{m} kx^{k-1} \ge (n+1)x^n \ge 2x^n$$

ולכן לכל זוג מספרים m,n המקיימים $m>n$ מתקיים

$$\sup_{x\in(-1,1)} \left| \sum_{k=n+1}^{m} kx^{k-1} \right| \ge \sup_{x\in(-1,1)} |2x^n| = 2$$

ומכאן, עפ"י מבחן קושי נקבל כי הטור הנתון אינו מתכנס במ"ש בקטע $(-1,1)$.

פתרון שאלה 4:

לכל $t>-1$, $\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx$.

כפי שראינו בשיעור התרגולים, $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

מתכנס במ"ש בקטע $[-a,a]$, $0<a<1$.

$$\Rightarrow \ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t (-1)^n x^n\,dx \right) =$$

בגלל ההתכנסות במ"ש

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

נסמן $n+1=k$ ונקבל:

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k}$$

$(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$