

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית (88-201)  
 שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ  
 סמסטר ב', מועד ב': 24.08.2012  
יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.  
משך הבחינה: 3 שעות.

1. בקואורדינטות  $(u^1, u^2) = (x, y)$ , נניח  $h(x, y) = Cx$  כאשר  $C > 0$  ונתבונן במטריקה מוגדרת על ידי נוסחה  $h(x, y)^{-2} (dx^2 + dy^2)$ .

- חשב את המקדמים  $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{11}^1$  של המטריקה.
- הגדר אופרטור Laplace-Beltrami  $\Delta_{LB}$  של המטריקה ותן נוסחה לעקמומיות של Gauss באמצעות  $\Delta_{LB}$ .
- בטא משוואה דיפרנציאלית של קו גאודזי של המטריקה.
- חשב את עקמומיות  $K = K(x, y)$  של המטריקה.

2. השאלה הזאת עוסקת במשטחים.

- מצא והוכח את הנוסחה ל  $\Gamma_{ij}^k$  באמצעות המקדמים  $g_{ij}$ .
- הוכח שהביטוי  $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^\ell x_\ell + L_{ij} n)$  הוא סימטרי ב-  $j$  ו  $k$ .
- פרט את היחס בין מקדמים  $L_{ij}$  לבין  $L_\ell^k$ .
- בטא את הביטוי  $L_{[ij} L_{\ell]}^k$  באמצעות מקדמי המטריקה.

3. יהי טורוס  $T^2$  ב-  $\mathbb{R}^3$  עם פרמטריזציה

$$x(\theta, \varphi) = ((9 + 3 \cos \varphi) \cos \theta, (9 + 3 \cos \varphi) \sin \theta, 3 \sin \varphi)$$

- מצא אורך של  $\theta$ -לולאה ושל  $\varphi$ -לולאה.
- הגדר את הפרמטר הקונפורמי  $\tau$  של הטורוס  $\mathbb{C}/L$  כאשר  $L$  הוא שריג.
- מצא פרמטר קונפורמי  $\tau = \tau(T^2)$  באמצעות אינטגרל.
- מצא ערך של אינטגרל של סאוף ג.

4. כתוב את הביטויים הבאים באמצעות  $\Gamma_{ij}^k, L_\ell^k$ , וגם  $L_{ij}$  ולפשט ככל האפשר:

- $\langle x_{ab}, x_k \rangle (\delta_c^b) g^{ak}$
- $\langle n_j, x_k \rangle (\delta^j_d)$
- $\langle n_j, x_{\ell k} \rangle (\delta^k_m)$
- $\langle n, x_{ab} \rangle (\delta_e^a) g^{bc}$

5. השעלה הזאת עוסקת בדריבציות.

- הגדר מושג של 1-תבנית על מרחב  $D_p$  של פונקציות בסביבת נקודה  $p \in \mathbb{R}^3$ .
- הגדר מושג של דריבציה בנקודה  $p$ .
- חשב עם הוכחה את מימד של מרחב הדריבציות של  $D_p$  כאשר  $p = 0 \in \mathbb{R}^3$ .

**בהצלחה!**