עבודת הגשה לחנוכה: סכומים ישרים של כל דבר

22 בנובמבר 2010

קרא את החומר הבא, וענה על השאלות המובאות בו. את העבודה יש להגיש עד יום ג' שאחרי חנוכה. עבודה זו היא בנוסף לתרגילי הבית הרגילים.

1 סכום ישר של מטריצות

הגדרה: יהיו A, B מטריצות ריבועיות מעל אותו שדה (לאו דווקא מאותו סדר). $A \oplus B$ היא המטריצה הריבועית שניתן לכתוב בכתיב הבלוקים כך: $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$.

עבור מטריצות ריבועיות $A_1, A_2, \ldots, A_k$ מעל אותו שדה (לאו דווקא מאותו סדר), נקבל

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k := \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix}.$$

כדי להתרגל להגדרה, שכנע את עצמך בעובדות הבאות (בהנתן שהמטריצות המחוברות/נכפלות זו לזו הן מאותו סדר):

1. $(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k) + (B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k) = (A_1 + B_1) \oplus (A_2 + B_2) \oplus \cdots \oplus (A_k + B_k)$.
2. $\alpha (A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k) = \alpha A_1 \oplus \alpha A_2 \oplus \cdots \oplus \alpha A_k$.
3. $(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k)(B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_k) = A_1B_1 \oplus A_2B_2 \oplus \cdots \oplus A_kB_k$.
4. $(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k)^m = A_1^m \oplus A_2^m \oplus \cdots \oplus A_k^m$.
5. לכל $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k) = f(A_1) \oplus f(A_2) \oplus \cdots \oplus f(A_k)$.
6. אם כל A_i הפיכה, אז $(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k)^{-1} = A_1^{-1} \oplus A_2^{-1} \oplus \cdots \oplus A_k^{-1}$.

תרגיל 1. הוכח (באינדוקציה על k או ישירות):

א. $|A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$.

ב. תהי $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$. הפולינום האופייני והמינימלי של A הם:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= p_{A_1}(x) \cdot p_{A_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_{A_k}(x) \\ m_A(x) &= lcm\left(m_{A_1}(x), m_{A_2}(x), \ldots, m_{A_k}(x)\right) \end{aligned}$$

2 סכום ישר של תת־מרחבים

הגדרה: יהיו V מרחב וקטורי, $U_1,\ldots,U_k \subseteq V$ תת־מרחבים. הסכום $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ הוא ישר אם כל אחד מהסכומים המופיעים בו הוא ישר. פורמלית, $W = ((U_1+U_2)+U_3)+\cdots+U_k$, ואנו דורשים שלכל $i = 1,\ldots,k-1$, הסכום

$$(U_1+\cdots+U_i)+U_{i+1}$$

הוא ישר, או באופן שקול:

$$(U_1+\cdots+U_i)\cap U_{i+1} = \left\{\vec{0}\right\}.$$

במקרה כזה, כותבים $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ ואומרים שזה פירוק של W לסכום ישר.

דוגמא: הסכום $\mathbb{R}^3 = \{(x,0,0)\ x\in\mathbb{R}\} + \{(0,y,0)\ y\in\mathbb{R}\} + \{(0,0,z)\ z\in\mathbb{R}\}$ הוא ישר.
באופן כללי, אם $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ בסיס של V, כך שהקבוצות $B_1,B_2,\ldots,B_k$ זרות בזוגות (כלומר לכל i,j שונים, $B_i \cap B_j = \emptyset$), אז $V = \operatorname{span} B_1 \oplus \operatorname{span} B_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{span} B_k$ סכום ישר.

נשים לב שסכום ישר של שני תת־מרחבים, כמו שהגדרנו בסמסטר א', הוא מקרה פרטי של ההגדרה הנ"ל.

תרגיל 2. מצא מרחב וקטורי V ותת־מרחבים $U_1,U_2,U_3 \subseteq V$ כך שכל אחד מהסכומים $U_1+U_2, U_2+U_3, U_1+U_3$ הוא ישר, אבל הסכום $U_1+U_2+U_3$ אינו ישר. (רמז: קח $V = \mathbb{R}^2$.)

תרגיל 3. יהי $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$. הוכח:
א. לכל $i = 1,\ldots,k$ מתקיים $(U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k)\cap U_i = \left\{\vec{0}\right\}$.
ב. לכל $\sigma \in S_k$, $W = U_{\sigma(1)} \oplus U_{\sigma(2)} \oplus \cdots \oplus U_{\sigma(k)}$.
ג. לכל $w \in W$ יש הצגה יחידה כסכום $w = u_1 + \cdots + u_k$ כך ש $u_i \in U_i$ לכל $i = 1,\ldots,k$.

הערה: קל לראות שגם ההיפך נכון, כלומר כל אחת מהתכונות המובאות בסעיפי תרגיל 3 גוררת שהסכום הוא ישר.

תרגיל 4. יהיו $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$, ולכל $i = 1,\ldots,k$ יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$. הוכח ש B בסיס של V.

3 קשרים ביניהם

הגדרה: יהיו $T : V \to V$ אופרטור, $U \subseteq V$ תת־מרחב. נזכור את ההגדרה ממתמטיקה בדידה:

$$T[U] := \{T(u)\ :\ u \in U\}$$

במלים אחרות, $T[U] = \operatorname{im}(T|_U)$.
נאמר ש U אינווריאנטי תחת T אם $T[U] \subseteq U$. כלומר, לכל $u \in U$ מתקיים $T(u) \in U$.
אם U אינוריאנטי תחת T, אז הצמצום של T ל U הוא אופרטור, כלומר $T|_U : U \to U$.

תרגיל 5. יהיו $T : V \to V$ אופרטור, ו $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T.
הוכח (באינדוקציה על k או באופן ישיר):
א. $\ker(T) = \ker(T|_{U_1}) \oplus \ker(T|_{U_2}) \oplus \cdots \oplus \ker(T|_{U_k})$.
ב. $\operatorname{im}(T) = \operatorname{im}(T|_{U_1}) \oplus \operatorname{im}(T|_{U_2}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{im}(T|_{U_k})$.

תרגיל 6. יהיו $T : V \to V$ אופרטור, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינווריאנטים תחת T, ולכל $i = 1,\ldots,k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$. הוכח (באינדוקציה על k או באופן ישיר):

$$[T]_B = [T|_{U_1}]_{B_1} \oplus [T|_{U_2}]_{B_2} \oplus \cdots \oplus [T|_{U_k}]_{B_k} = \begin{pmatrix} [T|_{U_1}]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T|_{U_2}]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T|_{U_k}]_{B_k} \end{pmatrix}.$$

4 סעיף רשות: סכום ישר של אופרטורים

הגדרה: יהי $V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$, ולכל $i=1,\ldots,k$ יהי $T_i:U_i\to U_i$ אופרטור. נגדיר $T:V\to V$ בצורה הבאה: לכל $v\in V$, יש הצגה יחידה $v=u_1+u_2+\cdots+u_k$ כך ש $u_i\in U_i$ לכל $i=1,\ldots,k$. נגדיר

$$T(v):=T_1(u_1)+T_2(u_2)+\cdots+T_k(u_k).$$

הפונקציה הזו T תסומן $T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_k$.

תרגיל 7. בסימונים הנ"ל, ובעזרת כל מה שהוכח לעיל, הוכח:

א. $T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_k$ אופרטור.

ב. $\operatorname{im}(T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_k)=\operatorname{im}(T_1)\oplus\operatorname{im}(T_2)\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}(T_k)$.

ג. $\ker(T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_k)=\ker(T_1)\oplus\ker(T_2)\oplus\cdots\oplus\ker(T_k)$.

תרגיל 8. היו $T:V\to V$ אופרטור, $V=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k$ פירוק של V לסכום ישר של מרחבים אינוריאנטים תחת T. נסמן $T_i=T|_{U_i}$.

א. הוכח: $T=T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_k$.

ב. לכל $i=1,\ldots,k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k$. הוכח:

$$[T]_B=[T_1]_{B_1}\oplus[T_2]_{B_2}\oplus\cdots\oplus[T_k]_{B_k}=\begin{pmatrix}[T_1]_{B_1} & O & \cdots & O\\ O & [T_2]_{B_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & O\\ O & \cdots & O & [T_k]_{B_k}\end{pmatrix}.$$