תרגול 8 – אינפי 1

קריטריון קושי להתכנסות טורים

הטור $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ מתקיים $|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

תרגיל

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{\sqrt{n}}$.

פתרון

מוטיבציה: $\left[\sqrt{(k+1)^2}\right]=k+1$, $\left[\sqrt{k^2}\right]=k$ ולכן לכל $k^2\le n\le(k+1)^2-1$ מתקיים $\left[\sqrt{n}\right]=k$. נראה שהטור לא מתכנס על ידי כך שנראה שאינו מקיים את קריטריון קושי.

$$|S_{(k+1)^2-1}-S_{k^2}|=|S_{k^2+2k}-S_{k^2}|=|a_{k^2+1}+a_{k^2+1}+\ldots+a_{k^2+2k}|=$$
$$=\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+2}}+\ldots+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+2k}}\right|=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}\ge$$
$$\ge\frac{2k}{\sqrt{k^2+2k}}\ge 1$$

מש"ל

משפט לייבניץ

אם א) $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת של מספרים חיוביים (להסביר מדוע לא אי שליליים); ב) $\lim a_n=0$; אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ נקרא "טור לייבניץ" ומתקיים:

א) הטור מתכנס,
ב) סכומו מקיים $0<S<a_1$.

הגדרה – התכנסות בהחלט

נאמר שטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ "מתכנס בהחלט" אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ "מתכנס בתנאי".

<u>תרגיל</u>

בדקו את התכנסות הטורים הבאים:

א) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^2}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$

<u>פתרון</u>

א) נבדוק אם הטור מתכנס בהחלט $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2}$. קל לראות שהסדרה $\frac{1}{(\log n)^2}$ מקיימת את תנאי מבחן העיבוי, ולכן הטור הנ"ל מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{(\log(2^n))^2}$ מתכנס. אבל $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{(\log(2^n))^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n\log(2))^2} = \frac{1}{\log^2 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$. קל להוכיח באינדוקציה שלכל $n \geq 4$ מתקיים $\frac{2^n}{n^2} \geq 1$ ולכן בפרט $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \neq 0$ ולכן הטור מתבדר (ולכן הטור המקורי לא מתכנס בהחלט) [דרך נוספת להראות שהוא מתבדר: מבחן קושי].

נמשיך לבדוק אם הטור מתכנס בתנאי: קל לראות ש $\frac{1}{(\log n)^2}$ מקיימת גם את תנאי משפט לייבניץ ולכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^2}$ מתכנס לפי משפט לייבניץ, כלומר זה טור מתכנס שאינו מתכנס בהחלט, לכן לפי הגדרה זהו טור מתכנס בתנאי.

ב) נבדוק התכנסות בהחלט. לפי מבחן קושי מתקיים $\lim \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$ ולכן הטור מתכנס בהחלט.

<u>תרגיל</u>

קבעו האם הטור הבא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin n + n}{n^2}$.

פתרון

נשים לב ש- $\frac{\sqrt{n}\sin n+n}{n^2}=\frac{\sin n}{n^{1.5}}+\frac{1}{n}$. כעת, הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר והטור $\sum\frac{\sin n}{n^{1.5}}$ מתכנס בהחלט על פי מבחן השוואה ראשון, שכן, $\left|\frac{\sin n}{n^{1.5}}\right|\le\frac{1}{n^{1.5}}$, ולכן מתכנס. תובנה כללית: סכום של טור מתבדר וטור מתכנס הינו טור מתבדר. הסבר: אחרת, היינו מעבירים אגף ומקבלים שהפרש של שני טורים מתכנסים הוא מתכנס...

לכן אצלנו הטור המקורי מתבדר.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שאם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אזי $\sum a_{n_k}$ מתכנס בהחלט לכל תת סדרה $\{a_{n_k}\}$ של $\{a_n\}$. האם הטענה נכונה כשמחליפים התכנסות בהחלט בהתכנסות רגילה?

<u>פתרון</u>

תהי $\{T_k\}$ סדרת הסכומים החלקיים של $\sum\left|a_{n_k}\right|$. כלומר, $T_k=\sum_{i=1}^{k}\left|a_{n_i}\right|$. בגלל שהיא מונוטונית עולה, מספיק להוכיח שהיא חסומה מלעיל. נשים לב שמתקיים $T_k=\sum_{i=1}^{k}\left|a_{n_i}\right|\le\sum_{j=1}^{n_k}\left|a_j\right|$, אבל $\sum_{j=1}^{n_k}\left|a_j\right|=S_{n_k}$ כאשר $\{S_n\}$ היא סס"ח של הטור $\sum|a_n|$.

על פי הנתון S_n מתכנסת (נניח ל- S) ולכן גם תת הסדרה שלה $S_{n_k}\to S$. נבחין שסס"ח של טור חיובי היא מונוטונית עולה, ולכן אם היא מתכנסת, היא חסומה על ידי סכומו של הטור. לכן $T_k\le S_{n_k}\le S$. ומכיוון שגם $\{T_k\}$ מונוטונית עולה וחסומה, נקבל שהיא מתכנסת ולכן הטור $\sum\left|a_{n_k}\right|$ מתכנס.

הטענה אינה נכונה אם מחליפים את ההתכנסות בהחלט בהתכנסות. דוגמא נגדית: $\sum a_n=\sum\frac{(-1)^n}{n}$ הוא טור לייבניץ מתכנס, אך הטור $\sum a_{2n}=\sum\frac{1}{2n}$ מתבדר.

<u>מבחן דיריכלה - Dirichlet</u>

נתון טור $\sum a_nb_n$. ונניח:

א) הסדרה $\{a_n\}$ היא מונוטונית שואפת לאפס,

ב) הטור $\sum b_n$ חסום (כלומר, סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה).

אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

<u>תרגיל</u>

בדקו את התכנסות הטור ... $1+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{2}{11}+...$.

<u>פתרון</u>

נסמן $a_n=\frac{1}{2n-1}$ ו- $\{b_n\}=\{1,1,-2,1,1,-2,...\}$. כלומר, הטור הוא מהצורה $\sum a_n b_n$.
הסדרה $\{a_n\}$ מונוטונית שואפת לאפס. נסמן ב- S_n את סס"ח של הטור $\sum b_n$.

מתקיים $S_n=\begin{cases}0 & n=3k\\ 2 & n=3k-1\\ 1 & n=3k-2\end{cases}$. לכן סס"ח חסומה ולכן הטור חסום. מכאן, לפי משפט דיריכלה, הטור מתכנס.

<u>תרגיל</u>

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

<u>פתרון</u>

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\sin n^2$ ונוכיח שהוא חסום. מכאן, מכיוון שהסדרה $\frac{1}{n}$ מונוטונית שואפת לאפס, נקבל לפי דיריכלה שהטור מתכנס.

ניזכר בנוסחא: $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$. כעת,
$\sin n\cdot\sin n^2=\frac{\cos(n-n^2)-\cos(n+n^2)}{2}$.

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{\cos(n-n^2)-\cos(n+n^2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left[\cos(n-n^2)-\cos(n+n^2)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos 0-\cos 2+\cos(-2)-\cos 6+\cos(-6)-\cos 12+...+\cos(k-k^2)-\cos(k+k^2)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos 0-\cos(k+k^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-\cos(k+k^2)\right]$$

לכן $|S_k|=\left|\frac{1}{2}\left[1-\cos(k+k^2)\right]\right|\le\frac{1}{2}(1+1)=1$. כלומר, הטור חסום.

משפט אבל – Abel

תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית וחסומה, ויהי $\sum b_n$ טור מתכנס. אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

דוגמא

נתבונן בטור $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. מתקיים $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס, הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה על ידי e. לכן לפי משפט אבל, הטור מתכנס.

משפט

אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אזי גם הטור הבא מתכנס:

$\sum_{i=1}^{\infty} A_i=\left(a_1+a_2+...+a_{n_1}\right)+\left(a_{n_1+1}+...+a_{n_2}\right)+...$ (ומתכס לאותו סכום).

הערה

אם הטור חיובי, אזי גם הכיוון ההפוך של המשפט נכון. כלומר, אם הטור עם הסוגריים מתכנס, אזי גם הטור המקורי מתכנס. במקרה הכללי אין זה נכון.
דוגמא נגדית: הטור $(1-1)+(1-1)+(1-1)+...$ מתכנס, אך הטור ללא הסוגריים $1-1+1-1+1...$ מתבדר.

תרגיל

בדקו את התכנסות הטור $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4^4}+...$.

פתרון

אינטואיציה: שימו לב שהטור שלנו מכיל את הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ המתבדר, ואת הטור הגיאומטרי $\sum\frac{1}{4^n}$ המתכנס. נניח בשלילה שהטור המקורי $\sum a_n$ מתכנס.
אזי הטור המתקבל על ידי הוספת סוגריים
$\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4^4}\right)+...$ מתכנס. כלומר הטור $\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4^n}\right)$ מתכנס. לפי משפט מתקיים שהטור $\sum\frac{1}{n}=\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^n}\right)$ מתכנס. סתירה.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו: אם הטורים $\sum a_n{}^2$ ו $\sum b_n{}^2$ מתכנסים אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

<u>פתרון</u>

$0 \le (|a_n| - |b_n|)^2 = a_n{}^2 - 2|a_n b_n| + b_n{}^2$ ולכן $2|a_n b_n| \le a_n{}^2 + b_n{}^2$. הטור $\sum\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$ מתכנס כסכום של שני טורים מתכנסים. לכן הטור $\sum 2|a_n b_n|$ מתכנס, ממבחן ההשוואה הראשון. מכאן, הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

מש"ל