בס"ד

חשבון אינפי 2

תרגיל 4- פתרון

שאלה 1:

שימו לב בהמשך בחלק מהשאלות מפנים לנוסחה (1) –הכוונה לנוסחה של אינטגרציה בחלקים $\int uv' = uv - \int u'v$

.1

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (1)$$

נסמן: $v'(x) = e^{-x}, u(x) = x$ אזי $v(x) = -e^{-x}, u'(x) = 1$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$\int xe^{-x}dx = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx =$$

$$= -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

.2

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx = \int e^{2x}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx =$$
$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx$$

נחשב אינטגרל האחרון בשיטות אינטראקציה לפי חלקים

נסמן $u(x) = \cos 2x \quad , \quad v'(x) = e^{2x}$ אזי

$$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}, u'(x) = -2\sin 2x$$

נציב בנוסחה (1) ונקבל

$$(2)\quad \int e^{2x}\cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}\sin 2x\, dx$$

נחשב האינטגרל האחרון בשיטות אינטגרציה לפי חלקים

נסמן $u(x) = \sin 2x \ , \ v'(x) = e^{2x}$ אזי $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}, u'(x) = 2\cos 2x$

נציב בנוסחה (1) ונקבל

$$(3)\quad \int e^{2x}\sin 2x dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x\, dx$$

מ(2) ו (3) מקבלים משוואה עבור נעלם $\int e^{2x}\cos 2x dx$

$$\int e^{2x}\cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x\, dx\right)$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos 2x = \frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x) + c$$

נחזור לאינטגרל שלנו ונקבל

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}*\frac{1}{4}\left(e^{2x}\cos 2x + \sin 2x + c\right) =$$
$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x) + c$$

.3

ההצבה היא $2x+3=t^6 \Leftarrow x=\frac{t^6-3}{2}$ ולכן $dx=3t^5dt$

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}dx=\int\frac{t^6-3}{2}t\cdot 3t^5dt=\frac{3}{2}\int\left(t^6-3\right)t^6=\frac{3}{2}\int\left(t^{12}-3t^6\right)dt=$$
$$=\frac{3}{2}\frac{t^{13}}{13}-\frac{1}{2}\frac{t^7}{7}+c=\frac{39}{2}t^{13}-\frac{1}{14}t^7+c$$

.4

ההצבה היא $x+1=t^2 \Leftarrow x=t^2-1$ ולכן $dx=2tdt$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}dx=\int\frac{t+2}{t^2-t}\cdot dt+t=2\int\frac{t-1+3}{t-1}dt\ =2\int\left(dt+3\int\frac{dt}{t-1}\right)=$$
$$=2t+6\ln\left|t-1\right|+c=2\sqrt{x+1}+6\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+c$$

.5

ההצבה היא $t^2=9-x^2 \Leftarrow -1\;\; -2xdx=2tdt$ ולכן

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}dx=\int x^2\sqrt{9-x^2}xdx=\int 9-t^2\,t(-t)dt=$$

$$=-9\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=-3\sqrt{(9-x^2)^3}+\frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)^5}+c$$

$$=-3(9-x^2)^{3/2}+\frac{1}{5}(9-x^2)^{5/2}+c$$

.6 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+c$

.7 $\int\frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx=\sqrt{2x-3}+c$

.8 $\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx$

נציב

$\sqrt{e^x}=t$

$\frac{1}{2}\sqrt{e^x}dx=dt$

$e^xdx=2tdt$

$$\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx=\int\frac{2tdt}{t^2+t}=\int\frac{2}{t+1}dt=2\ln|t+1|+c$$

.9 $\int\sin(\ln x)dx$

נשתמש באינטגרציה בחלקים

$u=\sin(\ln x)\qquad v'=1$

$u'=\frac{\cos(\ln x)}{x}\qquad v=x$

ולכן $\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$

אינטגרציה בחלקים פעם נוספת

$$u = \cos(\ln x) \qquad v' = 1$$

$$u' = \frac{-\sin(\ln x)}{x} \qquad v = x$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\right)$$

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + c_1$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + c$$

10. $\int 2x\arctan x\,dx$

אינטגרציה בחלקים

$$u = \arctan x \qquad v' = 2x$$

$$u' = \frac{1}{x^2+1} \qquad v = x^2$$

$$\int 2x\arctan x\,dx = x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = x^2\arctan x - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= x^2\arctan x - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x^2\arctan x - x + \arctan x + c$$

11.

$$\int \sin^6 x\cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 2x)(1-\cos 2x)^2}{16}\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\left(\int 1 + 2\cos 2x - 2\cos^3 2x - \cos^4 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\left(x + \sin 2x - 2\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx - \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx\right)$$

את שני האינטגרלים האחרונים נחשב בנפרד

$$2\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$$p = \sin 2x$$

$$dp = 2\cos 2x\,dx$$

$$2\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx = \int (1-p^2)\,dp = p - \frac{p^3}{3} + c = \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + c$$

$$\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{\cos 4x}{2}dx+\int\frac{\cos^2 4x}{4}dx=\frac{1}{2}x+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{1}{8}\int(1+\cos 8x)dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{64}\sin 8x+c=\frac{5}{8}x+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{1}{64}\sin 8x+c$$

נסכם את התוצאה הסופית:

$$\int\sin^6 x\cos^2 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\int\frac{\left(1-\cos^2 2x\right)(1-\cos 2x)^2}{16}dx$$

$$=\frac{1}{16}\left(\int 1+2\cos 2x-2\cos^3 2x-\cos^4 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\sin 2x-2\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2x dx-\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(x+\sin 2x-\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)-\left(\frac{5}{8}x+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{1}{64}\sin 8x+c_1\right)\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{8}x+\frac{\sin^3 2x}{3}-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{1}{64}\sin 8x\right)+c$$

שאלה 2 :

.1

$$I_m=\int x^\alpha \ln^m x dx \; =_{\text{חלקים}} =\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^m(x)-\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}m\cdot\ln^{m-1}(x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^m(x)-\int\frac{x^\alpha}{\alpha+1}m\cdot\ln^{m-1}(x)dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^m(x)-\frac{m}{\alpha+1}\cdot I_{m-1}+C$$

.2

$$\int\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$$

עבור $n=1$ $\quad \int\sin x dx=-\cos x+c$, עבור $n=2$

עבור $n>2$ נסמן $u(x)=\sin^{n-1}x$, $v'(x)=\sin x$ אזי

$$u'(x)=(n-1)\sin^{n-1}x\cos 2x$$

$$v(x)=-\cos x$$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$I_n=\int \sin^n x dx=-\cos x\sin^{n-1}x+(n+1)\int \sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x dx=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)dx=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\left(\int \sin^{n-2}xdx-\int \sin^n xdx\right)=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow$$

$$I_n=\frac{1}{n}((n-1)I_{N-2}-\cos x\sin^{n-1}x):\mathrm{n}>2$$ עבור