אינפי 4 - תרגול 3

12 באוגוסט 2011

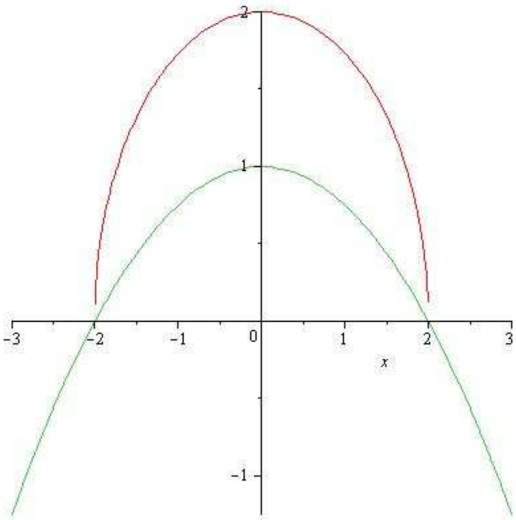
תרגיל

החלף את סדר האינטגרציה:

.1

$$\int_0^a dx \int\limits_{\frac{1}{2a}\left(a^2-x^2\right)}^{\sqrt{a^2-x^2}} f\left(x,\,y\right)dy$$

נצייר את התחומים:



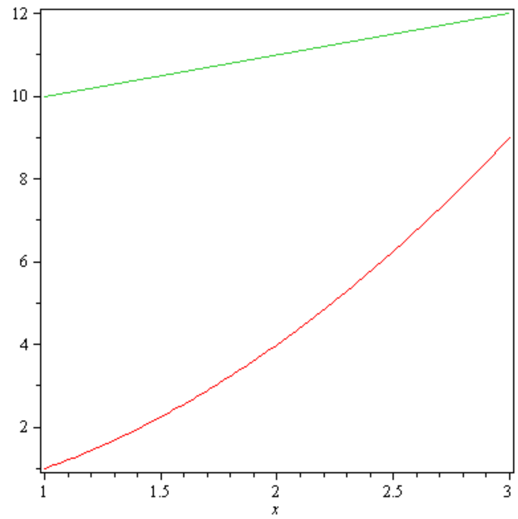
לכן

$$I=\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f\left(x,\,y\right)+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} f\left(x,\,y\right)dx$$

.2

$$\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f\left(x,\,y\right)dy$$

נצייר את התחום:



$$\begin{array}{lcl} y = x + 9 & \Rightarrow & x = y - 9 \\ y = x^2 & \Rightarrow & x = \pm y \end{array}$$

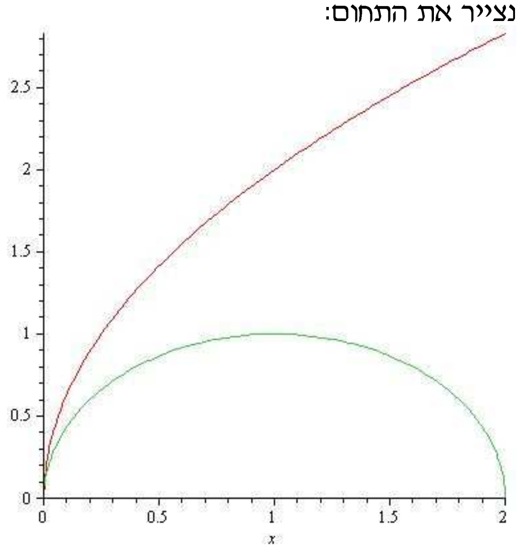
לכן

$$I = \int_1^9 dy \int_3^{\sqrt{y}} f(x,\, y)\, dx + \int_9^{10} dy \int_1^3 f(x,\, y)\, dx + \int_{10}^{12} dy \int_{y-9}^3 f(x,\, y)\, dx$$

3. עבור $x > 0,\ a > 0$:

$$I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,\, y)\, dy$$

נצייר את התחום:



$$
\begin{aligned}
y = \sqrt{2ax - x^2} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = 2ax - x^2 \\
x = a - \sqrt{a^2 - y^2} \quad &\Rightarrow \quad y^2 + (x-a)^2 = a^2
\end{aligned}
$$

לכן:

$$
I = \int_0^a dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f dx + \int_0^a dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f dx + \int_0^{-2\sqrt{2}a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f dx
$$

תרגיל

פתור:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D f(x,\, y)\, dxdy \\
D &= \left\{x^2 + y^2 = 2Rx\right\}
\end{aligned}
$$

פתרון

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 &= R^2 \\
(x-R)^2 + y^2 &= R^2
\end{aligned}
$$

קיבלנו מעגל שמרכזו $(R,\, 0)$ ורדיוסו R. נחליף משתנים:

$$
\begin{aligned}
y &= r \sin\theta \\
x &= r \cos\theta \\
|J| &= r
\end{aligned}
$$

נציב במשוואה של D ונקבל:

$$
\begin{aligned}
r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta &= 2R \cdot r \cos\theta \\
r^2 &= 2R \cdot r \cos\theta \\
r &= 2R \cos\theta
\end{aligned}
$$

אז הגבולות שלנו, כיוון שהמעגל כולו מימין לציר הy ומקביל לציר הx:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leq \ & \theta \ \leq \frac{\pi}{2} \\
0 \leq \ & r \ \leq 2R\cos\theta
\end{aligned}
$$

אזי האינטגרל הוא:

$$
I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\, dr
$$

תרגיל

$$I=\iint\limits_{D}f\left(x,\,y\right)dxdy$$

כאשר D כלוא בין הקווים הבאים:

$$\left\{ y=0,\,y=1,\,x=0,\,x=1\right\}$$

לכן

$$D=\left\{ \left(x,\,y\right)\,\mid0\le x\le1,\,0\le y\le1\right\}$$

נעבור גם פה לקואורדינטות קוטביות:

$$\begin{aligned}y & = & r\sin\theta\\ x & = & r\cos\theta\end{aligned}$$

נציב בישרים ונקבל:

$$\begin{array}{ccc}y=1 & \Rightarrow & r=\frac{1}{\sin\theta}\\ x=1 & \Rightarrow & r=\frac{1}{\cos\theta}\end{array}$$

נחלק את הריבוע שיש לנו לשני תחומים בעזרת האלכסון, כלומר לתחומים:

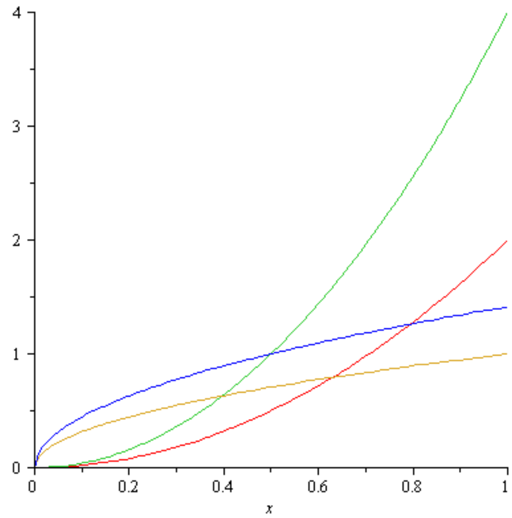
$$\begin{aligned}0\le & \theta & \le\frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{4}\le & \theta & \le\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ולכן:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}}f\left(r\cos\theta,\,r\sin\theta\right)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}}f\left(r\cos\theta,\,r\sin\theta\right)\cdot r\,dr$$

תרגיל

$$\begin{aligned}I & = & \iint\limits_{D}\frac{x^{2}}{y^{4}}\cos\left(\frac{x^{2}}{y}\right)dxdy\\ D & = & \begin{Bmatrix}y=2x^{2} & y=4x^{2}\\ y=\sqrt{x} & y=\sqrt{2x}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$



$$\left.\begin{aligned} y &= 2x^2 \\ y &= 4x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \tfrac{y}{x^2} &= 2 \\ \tfrac{y}{x^2} &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \frac{y}{x^2} = u$$

אזי

$$2 \leq u \leq 4$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ y &= \sqrt{2x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \tfrac{y^2}{x} &= 1 \\ \tfrac{y^2}{x} &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{y^2}{x} = v$$

אזי

$$1 \leq v \leq 2$$

נציב בפונקציה:

$$\begin{aligned} f(x,\, y) &= \frac{x^2}{y^4} \cos \frac{x^2}{y} \\ f(u,\, v) &= \frac{1}{v^2} \cos \frac{1}{u} \end{aligned}$$

נמצא יעקביאן:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} &= \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & -\frac{y^2}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{3y^2}{x^4} \\ |J| &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{y^2} = \frac{1}{3u^2} \end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_{u,\,v}} \frac{1}{v^2}\cdot\cos\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{3u^2}dudv \\ &= \frac{1}{3}\int_1^2\frac{dv}{v^2}\int_2^4\frac{1}{u^2}\cos\frac{1}{u}du \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{v}\right]_1^2\cdot\left[-\sin\frac{1}{u}\right]_2^4 \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}+1\right]\cdot\left[-\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{6}\left(\sin\left(\frac{1}{2}\right)-\sin\left(\frac{1}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

אינטגרל קווי מסוג ראשון

סימון:

$$\int\limits_c f\left(x,\,y,\,z\right)d\ell$$

אופן חישוב:

$$\int\limits_c f\left(x,\,y,\,z\right)d\ell = \int_a^b f\left(\overrightarrow{r}\left(t\right)\right)\cdot\left|\overrightarrow{r}'\left(t\right)\right|dt$$

אפיונים:

1. הכיוון של c אינו חשוב.
2. f פונק' סקלרית
3. אם $f=1$ אז האינטגרל הקווי מבטא את אורך העקום.
4. משמעות פיזיקלית: מסה של גוף על התיל c כשf מבטאת את הצפיפות של הגוף.

תהליך הפתרון

(חסרות הדקות האחרונות של התרגול, יושלם בקרוב)