תרגול 6-אושרית

חזרה על הנושאים עד כה מבחנים וממבחנים

שאלה ממבחן:

(א) הוכיחו של-A ול-A^t אותם ע"ע.

פתרון. נחשב את הפלינום האופייני

$$\begin{aligned} p_{A^t}(\lambda) &= |\lambda I - A^t| = \\ &= |\lambda I^t - A^t| = \\ &= |\lambda I - A| = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

מטריצת היחידה זהה לטרנספוז שלה

דטרמיננטה של A ושל A טרנספוז זהה

יש להם אותו פולינום אופייני ולכן אותם ע"ע

המשך שאלה:

(ב) הניחו שסכום איברי כל עמודה של A הוא 5777. הוכיחו ש-5777 הוא ע"ע של A.

המשך שאלה:

(ב) הניחו שסכום איברי כל עמודה של A הוא 5777. הוכיחו ש-5777 הוא ע"ע של A.

פתרון. ראשית נראה שלמטריצה $B = A^t$ יש עע 5777 על ידי זה שנראה ש-$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע לע"ע הדרוש

$$\left[B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]_i = \left[\begin{pmatrix} - & R_1(B) & - \\ - & R_2(B) & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(B) & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]_i = \sum_j [R_i(B)]_j = 5777$$

לכן

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 5777\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר 5777הוא עע של $B = A^t$ ולפי סעיף קודם הוא עע של A.

שאלה מבוחן:

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

(א) הוכיחו ש-A לכסינה לכל a

(ב) עבור כל ערך של $a \in \mathbb{R}$ מצאו את P ואת D.

פתרון:

פתרון. נמצא את הפולינום האופייני של A

$$0 = P_A(\lambda) = \left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & -a+2 \\ -1 & \lambda-1 & -a+2 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}\right| = (\lambda-a)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

לכן הע"ע הם $\lambda = a, 1, 2$

- $a \neq 1, 2$, ישנם שלושה ע"ע ולכן היא לכסינה, אבל בשביל סעיף ב' נמצא את הו"ע

$$V_a = N\left(\begin{pmatrix} a-2 & 0 & -a+2 \\ -1 & a-1 & -a+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = N\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -a+2 \\ -1 & 0 & -a+2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}\right) = span\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a+2 \\ -1 & 1 & -a+2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}\right) = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ובמקרה הזה $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

- $a = 1$: נמצא את הו"ע

$$V_1 = N\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2 = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי והפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים ולכן היא לכסינה במקרה שבו $a = 1$ ובמקרה זה $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ו- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• $a = 2$: נמצא את הו"ע

$$V_1 = N\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2 = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי והפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים ולכן היא לכסינה במקרה שבו $a = 2$ ובמקרה זה $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ו-$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

שאלה מבוחן:

2. מכפלה פנימית:

(א) נגדיר עבור $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ את הפעולה

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 4a_2 b_2$$

האם זאת מכפלה פנימית?

תזכורת:

מרחבי מכפלה פנימית

<u>הגדרה</u>: V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

<u>מכפלה פנימית</u> (/סקלרית) על V היא פונקציה $\langle\, ,\, \rangle : V\times V \to \mathbb{F}$

המקיימת את התכונות: 1. <u>אי-שליליות</u>: לכל $v\in V$ $\quad \langle v,v\rangle \geq 0$

ומתקיים: $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$

2. <u>סימטריות</u> (הרמיטיות): לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$$\langle u,v\rangle = \langle \overline{v,u} \rangle$$

3. <u>לינאריות במשתנה הראשון</u>: לכל $u,v,w\in V$

ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:

$$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$$

פתרון. נוכח את התכונות של מכפלה פנימית

- לינאריות:

$$\begin{aligned}
\langle a+\alpha b, c\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} a_1+\alpha b_1 \\ a_2+\alpha b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
&= (a_1+\alpha b_1)\,c_1 + 2\,(a_1+\alpha b_1)\,c_2 + 2\,(a_2+\alpha b_2)\,c_1 + 4\,(a_2+\alpha b_2)\,c_2 &= \\
&= a_1c_1 + 2a_1c_2 + 2a_2c_1 + 4a_2c_2 + \alpha\left[b_1c_1 + 2b_1c_2 + 2b_2c_1 + 4b_2c_2\right] &= \langle a, c\rangle + \alpha\,\langle b, c\rangle
\end{aligned}$$

- סימטריות

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
&= a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 4a_2b_2 &= \\
&= b_1a_1 + 2b_1a_2 + 2b_2a_1 + 4b_2a_2 &= \langle b, a\rangle
\end{aligned}$$

- חיובית

$$\begin{aligned}\langle a,a\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle &=\\ &= a_1^2+4a_1a_2+4a_2^2 &=\\ &= (a_1+2a_2)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

אך יתכן מצב ש-$a \neq 0$ אבל $\langle a,a\rangle = 0$ למשל עבור $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ולכן זה לא מכפלה פנימית!

תרגיל:

3. תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת המקיימת $A^4 = -A^2$

(א) הוכיחו ש-A יש לכל היותר 3 ע"ע שונים.

3. תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת המקיימת $A^4 = -A^2$

(א) הוכיחו ש-A יש לכל היותר 3 ע"ע שונים.

פתרון. זנתון ש-$A^4 = -A^2$ לכן A מאפס את הפולינום

$$f(x) = x^2\left(x^2+1\right) = x^2(x+i)(x-i)$$

לכן הפולינום המינימלי יכול להיות

$$m_A(x) = x^{0/1/2}(x+i)^{0/1}(x-i)^{0/1}$$

ואז הפולינום האופייני יכול להיות

$$p_A(x) = x^{0/1/2}(x+i)^{0/1}(x-i)^{0/1}$$

כלומר יש לכל היותר 3 שורשים

(ב) הוכיחו שאם A לכסינה אז $A^3 = -A$

על מנת שמטריצה תהיה לכסינה כל בלוק
זורדן שלה צריך להיות מגודל 1 ולכן

משפט: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ צמודה למטריצה בצורת זורדן (כלומר קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = J$, J בצורת זורדן) אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל.
במקרה זה מתקיים במטריצה J כי

1. מספר הפעמים שע"ע λ_0 מופיע על האלכסון = ר"א של λ_0
2. מספר הבלוקים של λ_0 = ר"ג של λ_0
3. גודל הבלוק הגדול ביותר = החזקה של $(\lambda - \lambda_0)$ בפ"מ

ולכן כל החזקות בפ"מ חייבות להיות לכל היותר 1

(ב) הוכיחו שאם A לכסינה אז $A^3 = -A$

פתרון. לכן הפולינום המינימלי יכול להיות

$$\begin{cases} m_A(x) = x(x+i)(x-i) \\ m_A(x) = x(x-i) \\ m_A(x) = x(x+i) \\ m_A(x) = (x+i)(x-i) \\ m_A(x) = (x-i) \\ m_A(x) = (x+i) \\ m_A(x) = x \end{cases}$$

X^3+x

בכל המקרים ניתן להכפיל בגורם החסר ולהגיע לזה ש- $f(x) = x(x+i)(x-i) =$

לפי קיילי המילטון מטריצה מאפסת פ"א שלה ולכן A- מאפסת את f.

(ג) נתון ש-Aהנל היא מסדר 3×3 אך לא לכסינה. מצאו את צורת הזורדן האפשריות.

פתרון. כיוון שאינה לכסינה אז הפולינום המינימלי בפולינום המינימלי שלה יש גורמים לינארית שווים כלומר, הפולינום המינילי שלה יכול להיות

הערה: בכל מקום שכתוב
Pa
הכוונה לפולינום מינימלי

i.

$$p_A(x) = x^2$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

ii.

$$p_A(x) = x^2(x+i)$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & -i & \\ \hline & & & -i \end{array}\right)$$

iii.

iii.

$$p_A\left(x\right)=x^2\left(x-i\right)$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & i & \\ \hline & & & i \end{array}\right)$$

iv.

$$p_A\left(x\right)=x^2\left(x-i\right)\left(x+i\right)$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & i & \\ \hline & & & -i \end{array}\right)$$

הוכח או הפרך:

(א) תהי A מטריצה ריבועית, ותהי A^t המטריצה המשוחלפת, אזי כל וקטור עצמי של A הוא גם וקטור עצמי של A^t

הוכח או הפרך:

(א) תהי A מטריצה ריבועית, ותהי A^t המטריצה המשוחלפת, אזי כל וקטור עצמי של A הוא גם וקטור עצמי של A^t

פתרון:

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז ו"ע של Aהוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ועוד שו"ע של A^t יהיה $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

עם ע"ע0

הוכח או הפרך:

(ב) אם המטריצה A^2 לכסינה אז גם A לכסינה

הוכח או הפרך:

(ב) אם המטריצה A^2 לכסינה אז גם A לכסינה

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה אבל A היא בלוק זורדן ולכן לא לכסינה.

(ג) אם הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים לינארים, אז A לכסינה

הוכח או הפרך:

(ב) אם המטריצה A^2 לכסינה אז גם A לכסינה.

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה אבל A היא בלוק זורדן ולכן לא לכסינה.

(ג) אם הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים ליניארים, אז A לכסינה

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז

$$m_A(x) = x^2$$

אבל A היא בלוק זורדן ולכן לא לכסינה.

בהצלחה!!!