שאלת אתגר 3 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

בשאלה זו נשאל את השאלה הבאה: נניח שנתונה לי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ונניח שלכל מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, מתקיים $AB = BA$. כלומר, A מתחלפת עם כל המטריצות. מיהי המטריצה A?

הגדרה. מטריצה סקלרית היא מטריצה מהצורה αI עבור $\alpha \in \mathbb{F}$ כלשהו.

דוגמה. המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ היא סקלרית.

שאלה 1. הוכיחו שכל מטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה. כלומר, אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא סקלרית, אזי לכל $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB = BA$.

הוכחה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה סקלרית. לכן קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ שעבורו $A = \alpha I$.
כעת, תהי $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. לכן

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha I)\,B = \alpha\,(IB) = \alpha B \\ BA &= B\,(\alpha I) = \alpha\,(BI) = \alpha B \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בתכונה ש-$(\alpha C)\,D = C\,(\alpha D) = \alpha\,(CD)$. לכן $AB = BA$. □

הגדרה. לכל $1 \le i, j \le n$, נגדיר מטריצה E_{ij} באופן הבא: E_{ij} היא המטריצה מסדר $n \times n$, שהאיבר במקום ה-(i,j) שלה הוא 1, ושאר האיברים הם 0.

דוגמה. ב-$\mathbb{F}^{3\times 3}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 2. בשאלה זו נבין איך המטריצות האלו מתנהגות ביחס לכפל. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

א. הוכיחו: במטריצה $A \cdot E_{ij}$, כל עמודה שאינה העמודה ה-j-ית היא עמודת אפסים, וכן $C_j\,(A \cdot E_{ij}) = C_i\,(A)$. כלומר, העמודה ה-$j$-ית של $A \cdot E_{ij}$ היא העמודה ה-i-ית של A.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $E_{ij} \cdot A$.
(**הדרכה:** שחלוף עשוי להיות לעזר).

הוכחה.

א. ודאו כי העמודה ה-j-ית של E_{ij} היא e_i. לכן, לפי כפל עמודה-עמודה,

$$C_j\left(A\cdot E_{ij}\right)=A\cdot C_j\left(E_{ij}\right)=A\cdot e_i=C_i\left(A\right)$$

כעת, יהי $k\neq j$. לכן $C_k\left(E_{ij}\right)=0$, ונקבל

$$C_k\left(A\cdot E_{ij}\right)=A\cdot C_k\left(E_{ij}\right)=A\cdot 0=0$$

לכן, במטריצה $A\cdot E_{ij}$, כל עמודה שאינה העמודה ה-j-ית היא עמודת אפסים, וכן $C_j\left(A\cdot E_{ij}\right)=C_i\left(A\right)$.

ב. במקום לנסח מחדש את הכל, נשים לב כי $E_{ij}^t=E_{ji}$. כמו כן,

$$\left(E_{ij}\cdot A\right)^t=A^t\cdot E_{ij}^t=A^t\cdot E_{ji}$$

לפי סעיף א', $A^t\cdot E_{ji}$ היא המטריצה שבעמודה ה-i-ית שלה יש את העמודה ה-j-ית של A^t, ושאר העמודות הן אפס. אם נשחלף כדי לקבל את $E_{ij}\cdot A$, נקבל שהשורה ה-i-ית של $E_{ij}\cdot A$ היא השורה ה-j-ית של A, ושאר השורות הן אפס.

□

שאלה 3. הוכיחו: נניח שנתונה מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $AB=BA$. כלומר, A מתחלפת עם כל המטריצות. הוכיחו ש-A סקלרית.

הוכחה. יש הוכחה בקישור הזה, בפתרון לשאלה 2. בקובץ הזה הם מוכיחים בנפרד עבור המקרה של 2×2, כך שאפשר לראות ממש למה זה נכון. □

כעת נשאל עוד שאלה, שאינה קשורה לשאלה הנ"ל.

שאלה 4. מצאו את כל המטריצות $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלכל מטריצה $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ יתקיים

$$\operatorname{tr}\left(AB\right)=\operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(B\right)$$

שכחתי לכתוב שנניח $n\geq 2$, אחרת זה לא מעניין.

פתרון (למקרה 2×2). ראשית, נדגים במקרה 2×2, כדי לקבל אינטואיציה. נסמן $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. רוצים שלכל $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ יתקיים

$$\operatorname{tr}\left(AB\right)=\operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(B\right)$$

נחשב:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(AB\right) &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bw\\ cx+dz & cy+dw\end{pmatrix}\right)=ax+bz+cy+dw\\ \operatorname{tr}\left(A\right)\operatorname{tr}\left(B\right) &= \left(a+d\right)\left(x+w\right)=ax+aw+dx+dw\end{aligned}$$

כלומר, רוצים שלכל $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ יתקיים

$$ax+bz+cy+dw=ax+aw+dx+dw$$

כלומר

$$bz+cy=aw+dx$$

אפשר להציב $x=1$, $y=z=w=0$ ולקבל $d=0$; נציב $y=1$, $x=z=w=0$ ונקבל $b=0$. באופן דומה מקבלים $a=b=c=d=0$, ולכן $A=0$. עכשיו נעבור למקרה הכללי.

פתרון. קודם כל, ניקח את מטריצת היחידה $B = I$. נקבל

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A \cdot I) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(I) = n\operatorname{tr}(A)$$

ולכן $\operatorname{tr}(A) = 0$. זה יעזור בהמשך.
אפשר לכפול במטריצות E_{ij} שראינו מקודם עבור $i \neq j$. אם $i \neq j$, אזי $\operatorname{tr}(E_{ij}) = 0$ (כי האיבר היחיד שאינו אפס אינו על האלכסון). לפי הנתון,

$$\operatorname{tr}(A \cdot E_{ij}) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(E_{ij}) = 0$$

לפי שאלה 2, $A \cdot E_{ij}$ היא המטריצה שבעמודה ה-j-ית שלה יש את העמודה ה-i-ית של A, ובשאר העמודות יש אפסים. לכן,

$$\operatorname{tr}(A \cdot E_{ij}) = a_{ji}$$

נשווה את שתי המשוואות שקיבלנו, ונקבל $a_{ji} = 0$. אבל אפשר לבחור כל זוג אינדקסים $i \neq j$, ולכן בהכרח A אלכסונית.
מה יקרה אם נכפיל עכשיו ב-E_{ii}? נשים לב כי $\operatorname{tr}(E_{ii}) = 0$, ולכן

$$\operatorname{tr}(A \cdot E_{ii}) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(E_{ii}) = \operatorname{tr}(A)$$

אבל ב-$A \cdot E_{ii}$, האיבר היחיד על האלכסון שאינו אפס הוא a_{ii}. לכן

$$\forall i = 1, \ldots, n : \ a_{ii} = \operatorname{tr}(A) = 0$$

ולכן המטריצה היחידה המקיימת את זה היא מטריצת האפס.

הדרכה לשאלה 2.

א. כפל עמודה.

ב. שימו לב ש-$(E_{ij})^t = E_{ji}$ (מדוע?), והיעזרו בסעיף הקודם.

הדרכה לשאלה 3. היעזרו בשאלה 2, כלומר בדקו מה אומר התנאי $E_{ij} \cdot A = A \cdot E_{ij}$.

הדרכה לשאלה 4. נסו להציב במקום B מטריצות מוכרות: מטריצת היחידה, מטריצות אלמנטריות, המטריצות E_{ij}... שילוב מתאים בסדר הנכון עשוי להניב תוצאה.