

שיעורי בית מספר 2

1. תהינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. יהא $\lambda \in \mathbb{F}$. הוכיחו כי λ ע"ע של AB אמ"מ λ ע"ע של BA (פצלו למקרים: $\lambda = 0$ ו $\lambda \neq 0$).

2. עבור אילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה

(א) מעל \mathbb{R}

(ב) מעל \mathbb{C}

3. תהא $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $\text{rank}(A - 3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע שווה ל - 5. הוכיחו כי A לכסינה מעל \mathbb{R} ומצא את האלכסונית של A דומה לה.

4. תהא $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ מטריצה עם פ"א $p_A = x^3 - 2ix^2 + 3x$ מה הדרגה של A^k ?

5. תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. הוכיחו כי אם cA , A דומות (עבור c מרוכב) אזי $c^k = 1$ עבור $1 \leq k \leq n$ או $A^n = 0$. הדרכה: הפ"א של cA

6. תהא $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. נתון: 1, -1 ע"ע של A . נניח כי $\deg(m_A(x)) = 2$.

(א) הוכיחו ש- A ניתנת לשילוש.

(ב) הוכיחו ש- A הפיכה ומצאו את A^{-1} .

(ג) הוכיחו: $|A| = 1 \iff \text{tr}(A) = 0$

(ד) נסמן $f(x) = x^2 - x - 2$. האם $f(A)$ הפיכה?

7. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה המקיימת:

$$\forall j : A_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \text{ is even} \\ -1 & i \text{ is odd} \end{cases}$$

הוכיחו:

(א) לכסינה אם ורק אם n אי-זוגי.

(ב) ניתנת לשילוש.