אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 1

*כמובן שיש עוד דרכים נכונות לפתור את השאלות.

1. דרגו את המטריצה הבאה לפי שיטת הדירוג של גאוס: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2. פתור את המערכת: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 4x + z = 3 \\ x - \frac{1}{2}y + 6z = 6 \end{cases}$

פתרון: נשים במטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[R_3 \leftarrow 2R_3]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 & 12 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 13 & 12 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הוא $\begin{pmatrix} \frac{21}{40} \\ \frac{-3}{20} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$.

3. מצא פתרון כללי למערכת: $\begin{cases} x - 2y + 3z - w = 3 \\ 2x - 4y + 4z - 2w = 4 \\ x - 2y + 5z - w = 5 \\ 2x - 4y + 6z - 2w = 6 \end{cases}$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, w הם משתנים חופשיים ולכן נציב בהם פרמטרים: $y = t,\ w = s$ ואז הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} 2t + s \\ t \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$.

4. עבור אילו ערכי $c \in \mathbb{R}$ למערכת הבאה יש פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/ אין פתרון?

$$\begin{cases} 3x + y + cz = 0 \\ 6x + cy + (2c+1)z = 1 \\ 9x + 3y + (c^2+3) = c - 1 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & c & 0 \\ 6 & c & 2c+1 & 1 \\ 9 & 3 & c^2+3 & c-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (c-1)(c-2) & c-1 \end{pmatrix}$$

יש לבדוק את המקרים $c = 1, 2$, אם $c \neq 1, 2$ אז אין אף שורת אפסים, ובכל עמודה יש ציר ולכן יהיה פתרון יחיד.

אם $c = 1$ המטריצה נראית כך $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ אין פה שורת סתירה, ויש משתנה חופשי (z) ולכן יש אינסוף פתרונות.

אם $c = 2$ המטריצה נראית כך $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ בשורה האחרונה יש שורת סתירה ולכן אין פתרון.

5. עבור אילו ערכי $c \in \mathbb{R}$ למערכת הבאה יש פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/ אין פתרון?

$$\begin{cases} x + y + cz = 5 \\ 2x + 4y + 6z = 6 \end{cases}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & c & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & c & 5 \\ 0 & 2 & 6 - 2c & -4 \end{pmatrix}$$

אין שורת סתירה, וללא תלות בערך של c יש משתנה חופשי z ולכן לכל ערך של c יש אינסוף פתרונות.

בהצלחה!