<u>פתרון תרגיל 1</u>

1. לכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו $a,b\in\mathbb{R}$ מגדירים $aE+b:=\{ax+b:x\in E\}$ (ז"א ש $aE+b$ היא תמונת E תחת הפונקציה הלינארית $x\mapsto ax+b$). הוכיחו: $m*(aE+b)=|a|m*(E)$.

פתרון: הזזה ראיתם בהרצאה. לכן נראה רק את המקרה $m*(aE)=|a|m*(E)$.

המקרה בו $a=0$ הינו טריויאלי שכן אז $aE=0$. נוכיח ל $a\neq 0$.

למה: O כיסוי פתוח של E אם ורק אם aO כיסוי פתוח של aE .

הוכחה:

$\Leftarrow$: הפונקציה $x\mapsto ax$ פתוחה (ההופכית שלה רציפה) ולכן aO קבוצה פתוחה. מצד שני $aO=a(E\cap O)\cup(O/E)=a(E\cup(O/E))=aE\cup a(O/E)$, ומכאן $aE\subseteq aO$. ולכן aO כיסוי פתוח של aE .

$\Rightarrow$: באותו אופן ע"י $x\mapsto\frac{1}{a}x$. מש"ל.

כעת, נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n=a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)$ ומכאן ש

$$\begin{aligned}
m*(aE)&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)\,|\,aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, I_n\text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(aI_n)\,|\,E\subseteq a\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n\right), I_n\text{ is an interval}\}\\
&=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|a|l(I_n)\,|\,E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right), I_n\text{ is an interval}\}\\
&=|a|\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)\,|\,E\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right), I_n\text{ is an interval}\}\\
&=|a|\mathrm{m}*(E)
\end{aligned}$$

מש"ל.

2. הוכיחו כי כל קבוצה קומפקטית ב $\mathbb{R}$ הינה מדידה לבג.

פתרון: ראיתם בהרצאה כי הקטע (a,∞) הינו קבוצה מדידה.נשים לב כי אם נוסיף לקבוצה מדידה לבג קבוצה בעלת מידה 0 נקבל שוב קבוצה מדידה לבג. אכן, עבור כל $A\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*\left(A\cap\left(E\cup E'\right)\right)+m^*\left(A\cap\left(E\cup E'\right)^c\right)\le$$
$$m^*\left(A\cap E\right)+m^*\left(A\cap E'\right)+m^*\left(A\cap E^c\right)$$
$$=m^*\left(A\cap E\right)+m^*\left(A\cap E^c\right)\le m^*\left(A\right)$$

מכאן שגם $[a,\infty)$ הינה מדידה(אפשר פשוט לומר שהיא מדידה מאיחוד של מדידות אבל אין לזה ערך מוסף...). כמו כן ראינו כי המשלים של מדידה הינו קבוצה מדידה ולכן $(-\infty,a)$ מדידה. חיתוך של קבוצות מדידות גם הוא מדיד ולכן עבור $a<b$ $(a,\infty)\cap(-\infty,\mathrm{b})=(a,b)$ הינו קטע פתוח מדיד. מכאן שכל קטע פתוח הינו מדיד. אם נשתמש בעובדה כי איחוד בן מניה של קבוצות מדידות הינו מדיד אף כן, נקבל כי כל קבוצה פתוחה הינה מדידה ומכאן שכל קבוצה סגורה מדידה ובפרט קבוצה קומפקטית.

3. הגדרה: נאמר שקבוצה $G\subseteq\mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G\in G_\delta$ המקיימת $E\subseteq G$ וכן $m^*\left(G\right)=m^*\left(E\right)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E\subseteq O$ וכן

$$m^*\left(O\right)<m^*\left(E\right)+\varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

פתרון: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m^*\left(O\right)<m^*\left(E\right)+\varepsilon$. מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים קטעים $\{I_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty}l\left(I_k\right)<m^*\left(E\right)+\varepsilon$. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k=O$, נקבל כי O הינה קבוצה פתוחה המקיימת $m^*\left(O\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}l\left(I_k\right)<m^*\left(E\right)+\varepsilon$. נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש $m^*\left(O'_m\right)<m^*\left(E\right)+\frac{1}{m}$. נסמן $O=\bigcap_{m=1}^{\infty}O_m$. זוהי קבוצה ב G_δ . מהמונטוניות של המידה נקבל

$\forall m\in\mathbb{N}\quad m^*\left(E\right)\le m^*\left(O\right)=m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}O_m\right)<m^*\left(E\right)+\frac{1}{m}$. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון.