בס"ד יום חמישי י"ב אלול תשע"ה

הוכחות משפטים בבדידה:

1.קבוצת המנה של יחס שקילות על A היא חלוקה של A כמו כן, כל חלוקה של A משרה יחס שקילות על A .

צ"ל: 1. $\emptyset \notin A_R$

נניח בשלילה ש $\emptyset \in A_R$, לכן הקבוצה הריקה היא מחלקת שקילות *a ששייך לA כלשהו ולכן אחת ממחלקות השקילות היא קבוצה ריקה. וכיוון ש* aRa *(*רפלקסיביות) *אזי* a *שייך למחלקת השקילות* $[a]_R$ *בסתירה!*

2. $\cup A_R = A$

צד ראשון: יהי $x \in \cup A_R$ לכן קיימת מחלקת שקילות $[a]_R$ כך ש $x \in [a]_R$ וידוע ש $[a]_R \subseteq A$ ולכן x שייך לA.

צד שני: יהי $a \in A$. צ"ל $a \in \cup A_R$ שקיימת קבוצה ששייכת

$[x]_R \in A_R$ כך ש $a \in [x]_R$ נבחר a=x $[a]_R \in A_R$ אכן ראינו לפי רפלקסיביות $a \in [a]_R$.

3.כל שני מחלקות הן זרות זו לזו.

תהיינה $[x]_R, [y]_R \in A_R$ כך ש $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ צריך להוכיח ש $[x]_R = [y]_R$.

נבצע הכלה דו כיוונית:

יהי $a \in [x]_R$ וצ"ל $a \in [y]_R$. לפי הנתון קיים איבר z כך ש $z \in [y]_R$ וגם $z \in [x]_R$, ולכן yRz וגם xRz וכיוון שR סימטרי אז zRy ובגלל שR טרנזיטיבי xRy. נתון xRa וצ"ל yRa ומסימטריות yRx ומטרנ' yRa.

ויוצא לנו $a \in [y]_R$ (בצד השני דומה) ומ.ש.ל.

הרצאה 4

היחס המושרה ע"י החלוקה

יהי $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A, אזי $R=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ הוא יחס שקילות על A. קוראים לו **היחס המושרה** ע"י החלוקה.

הוכחה

רפלקסיביות – יהי $a\in A$ מכיוון ש $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A מתקיים $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=A$ ז"א $a\in\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i$ מכיוון ש $R=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(a,a)\in R$.

סימטריות – יהי $(a,b)\in R$ מכיוון ש $R=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ אז $(a,b)\in\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ ז"א קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge b\in A_i$ ולכן $(b,a)\in A_i\times A_i$ ומכיוון ש $R=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(b,a)\in R$.

טרנזיטיביות – נניח ש $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R$ מכיוון ש $(a,b)\in R$ ו $R=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ קיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge b\in A_i$. מכיוון ש $(b,c)\in R$ קיים $j\in I$ כך ש $b\in A_j\wedge c\in A_j$. קיבלנו ש $b\in A_i\cap A_j \Rightarrow A_i\cap A_j\neq\phi$ מכיוון ש $\{A_i : i\in I\}$ חלוקה של A נקבל ש $i=j$.
סה"כ קיבלנו שקיים $i\in I$ כך ש $a\in A_i\wedge c\in A_i$ ולכן קיים $i\in I$ כך ש $(a,c)\in A_i\times A_i$ ומכיוון ש $R=\bigcup\limits_{i\in I}(A_i\times A_i)$ נקבל ש $(a,c)\in R$.

המשך משפט 1

מסקנה

קיימת התאמה בין החלוקות של A לבין יחסי השקילות על A.

דוגמה

לכל $i\in\mathbb{Z}$ תהי $A_i=\{x\in\mathbb{R} : i\le x<i+1\}$. האוסף $\{A_i : i\in\mathbb{Z}\}$ הוא חלוקה של הממשיים. היחס המושרה הוא $\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor$ שפירושו, החלק השלם של x מלמטה שווה לחלק השלם של y מלמטה.

קבוצת המנה

עבור יחס שקילות R נגדיר את קבוצת המנה כקבוצת כל מחלקות השקילות. $A/R=\{[a]_R | a\in A\}$.

דוגמאות

1. יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ ויהי m מספר טבעי הגדול מ 1 אז $a=b(\mathrm{mod}\, m)$ אם ורק אם קיים מספר $k\in\mathbb{Z}$ כך ש $a=b+k\cdot m$.

יחס השקילות מודולו $a,b\in\mathbb{Z}$ הוא היחס הבא: $R_m=\{(a,b) | a,b\in\mathbb{Z}\wedge a=b(\mathrm{mod}\, m)\}$.

מחלקות השקילות של R_3 הם:

$$[0]_{R_3}=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,0\ldots\}$$

$$[1]_{R_3}=\{\ldots-5,-2,1,4,3,0\ldots\}$$

$$[2]_{R_3}=\{\ldots,-4,-1,2,5,\ldots\}$$

נרשום את קבוצת כל מחלקות השקילות ונקבל את קבוצת המנה: $\mathbb{Z}_3=\{[0]_{R_3},[1]_{R_3},[2]_{R_3}\}$.

2. תהיי $A\neq\phi$. ליחס המלא יש רק מחלקת שקילות אחת והיא A.
3. תהיי $A\neq\phi$. ליחס הזהות, מחלקות השקילות הן כל הקבוצות מהצורה $\{a\}$, כאשר $a\in A$.

נראה שהתחום והטווח של שתי הפונקציות זהה. $I_B : B \to B$, $f : A \to B$ על פי הגדרת ההרכבה $I_B \circ f : A \to B$.

יהי $a \in A$ אז $(I_B \circ f)(a) = I_B(f(a)) = f(a)$.

באותו אופן ניתן להראות ש $f \circ I_A = f$.

הגדרה

תהיינה A, B קבוצות ותהיי $f : A \to B$ פונקציה. הפונקציה f הפיכה אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש $g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$. הפונקציה g תקרא הפונקציה ההופכית של f ותסומן ע"י f^{-1}.

משפט

תהיי $f : A \to B$ פונקציה הפיכה. הפונקציה ההפיכה של f יחידה.

הוכחה

נניח שהפונקציות $g : B \to A, h : B \to A$ הן ההופכיות של f. יהי $b \in B$ אז:

$$g(b) = I_A(g(b)) = (h \circ f)(g(b)) = h(f(g(b))) = h(f \circ g(b)) = h(I_B(b)) = h(b).$$

משפט

תהיי $f : A \to B$. הפונקציה f הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.

הוכחה

משפט 2

$\Leftarrow$

נתון ש f הפיכה ולכן קיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש $f \circ g = I_B \wedge g \circ f = I_A$.

מכיוון ש $g \circ f = I_A$ נקבל ש $g \circ f$ חח"ע וממשפט קודם f חח"ע.

מכיוון ש $f \circ g = I_B$ נקבל ש $f \circ g$ על וממשפט קודם f על.

$\Rightarrow$

נתון ש f חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $g : B \to A$. יהי $b \in B$ מכיוון ש f על $f^{-1}[\{b\}] \neq \phi$ ומכיוון ש f חח"ע קיים לכל היותר איבר אחד ב $f^{-1}[\{b\}]$ ז"א בקבוצה $f^{-1}[\{b\}]$ קיים איבר אחד ויחיד נסמנו ב a_b.

$g(b) = a_b$ הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שלכל $b \in B$ קיים איבר אחד ויחיד ב $f^{-1}[\{b\}]$.

נוכיח שהפונקציה $g : B \to A$ היא ההופכית של הפונקציה f.

יהי $a \in A$ נסמן $f(a) = b$ ואז $a = a_b$. $(g \circ f)(a_b) = g(f(a_b)) = g(b) = a_b$.

יהי $b \in B$ ואז $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b$.

הערה

אם $f : A \to B$ וקיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש $f \circ g = I_B$ אז לא בהכרח ש f הפיכה ולא בהכרח ש g ההופכית שלה.

דוגמה

$A = \{1,2,3\}, B = \{5,6\}$.

נגדיר $f : A \to B$ ע"י $f(1) = 5, f(2) = 6, f(3) = 5$ ו $g : B \to A$ ע"י $g(5) = 1, g(6) = 2$.

f אינה חח"ע ו g אינה על ולכן שתיהן לא הפיכות למרות ש $f \circ g = I_B$.

הסיבה: $g \circ f \neq I_A$.

הרצאה 9

הגדרה

יהיו A,B קבוצות. נסמן את קבוצת הפונקציות מ A ל B ב B^A.

משפט

אם A,B קבוצות סופיות, ו B אינה ריקה, אז B^A סופית ו $\left|B^A\right|=\left|B\right|^{\left|A\right|}$.

הוכחה

נסמן $A=\left\{a_1,a_2,...,a_n\right\},B=\left\{b_1,b_2,...b_m\right\}$ לכל איבר a_i בתחום יש איבר אחד ויחיד כך ש $\left(a_i,b_j\right)\in G$ ולכן יש ל $a_i,1\le i\le n$ m אפשרויות. סה"כ האפשרויות שנקבל הוא m^n.

נכליל את המשפט לקבוצות אינסופיות ועבור שתי קבוצות A,B נסמן $\left|B^A\right|=\left|B\right|^{\left|A\right|}$.

טענה

הגדרת העוצמה של קבוצת הפונקציות מ A ל B מוגדרת היטב. ז"א אם $\left|A\right|=\left|C\right|\wedge\left|B\right|=\left|D\right|$ אז $\left|B^A\right|=\left|D^C\right|$.

הוכחה

$\left|A\right|=\left|C\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to C$.

$\left|B\right|=\left|D\right|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $g:B\to D$.

נגדיר פונקציה $h:B^A\to D^C$ עבור $t:A\to B$ נגדיר $h\left(t\right):C\to D$ להיות $g\circ t\circ f^{-1}$.

מכיוון ש g,f חח"ע ועל הפונקציה h חח"ע ועל.

נוכיח חח"ע

$g\circ t_1\circ f^{-1}=g\circ t_2\circ f^{-1}\Leftarrow g^{-1}\circ g\circ t_2\circ f^{-1}\circ f=g^{-1}\circ g\circ t_1\circ f^{-1}\circ f\Leftarrow t_1=t_2$.

נוכיח על

יהי $s\in D^C$ אז $g^{-1}\circ s\circ f$. $h\left(g^{-1}\circ s\circ f\right)=g\circ\left(g^{-1}\circ s\circ f\right)\circ f^{-1}=s$.

משפט

לכל קבוצה A $\left|P\left(A\right)\right|=2^{\left|A\right|}$.

הוכחה

תהיי $g:P\left(A\right)\to\left\{0,1\right\}^A$ המוגדרת ע"י $g\left(B\right)=\chi_B$ נוכיח ש g פונקציה חח"ע ועל.

חד חד ערכית

יהיו $B_1,B_2\in P\left(A\right)$ כך ש $g\left(B_1\right)=g\left(B_2\right)$ נוכיח ש $B_1=B_2$. יהי $b\in B_1$ על פי הגדרת הפונקציה האפיינית $\chi_{B_1}\left(b\right)=1$ מכיוון ש $g\left(B_1\right)=g\left(B_2\right)$ נקבל ש $\chi_{B_1}=\chi_{B_2}$ ולכן $\chi_{B_2}\left(b\right)=1$ ז"א $b\in B_2$.

קיבלנו ש $B_1\subseteq B_2$ באותו אופן ניתן להראות ש $B_2\subseteq B_1$.

על

תהיי $f\in\left\{0,1\right\}^A$ נתבונן בקבוצה $C=\left\{x\in A\middle|f\left(x\right)=1\right\}$ הפונקציה $\chi_C=f$ ולכן $g\left(C\right)=f$.

מבחן 3

משפט

$\aleph=10^{\aleph_0}$.

הוכחה

משפט
4
חלק א'

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

נבחר שתי קבוצות שהם $\aleph_0$ קבוצת הזוגיים (נסמנה A) וקבוצת האי-זוגיים.

נסמנה A' ויודעים ש $A \cup A' = \mathbb{N}$

וכן מכיוון ש A | A' הם קבוצות זרות $(A \cap A' = \emptyset)$

אזי $|A \cup A'| = |\mathbb{N}|$

וכן $|A| + |A'| = \aleph_0$

נוכיח שהעוצמה של $|A| = |A'| = \aleph_0$

נוכיח ~~שהעוצמה~~ ש: $|A| = |A'|$

ע"י $f: 1{\text -}1,\ A \to A'$

$f(n) = n+1$

חח"ע: $f(n) = f(m)$

$n+1 = m+1$

$\blacksquare \quad n = m$

על: צ"ל: לכל $n' \in A'$ ישנו $n \in A$

ככה ש $f(n) = n'$

נבחר $n = n' - 1$

ואז $f(n'-1) = n'$

$\blacksquare \quad n' = n'$

נראה ש $|A| = |\mathbb{N}|$

ישנה $g: A \to \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Q}$

$g(n) = \frac{n}{2}$

וברור שהיא חח"ע ועל והוכחנו.

נניח שיש מקור ל $n\in\mathbb{N}$ כל שהו ונוכיח של $n+1$ יש מקור. B אינסופית וקבוצת איברי B שאינם עולים על a היא סופית, לכן קבוצת איברי B הגדולים מ a אינה ריקה, יהי b הראשון שביניהם ואז $f(b)=n+1$.

תהיי A קבוצה בת מנייה כלשהי, אם A סופית, כל תת קבוצה שלה סופית, ולכן בת מנייה. אם A אינסופית, אז A שקולה ל $\mathbb{N}$. תהיי B תת קבוצה של A ונוכיח שהיא בת מניה. תהיי f פונקציה חח"ע מ A על $\mathbb{N}$, אז $f[B]\subseteq\mathbb{N}$ ולכן היא בת מנייה. הפונקציה $g:B\to f[B]$, כך שלכל $x\in B$ $f(x)=g(x)$, היא חח"ע מ B על $f[B]$, לכן B שקולה לקבוצה בת מנייה ולכן היא בת מנייה.

<u>האלכסון של קנטור</u>

<u>משפט</u>

$$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$$

<u>הוכחה</u>

לכל זוג סדור נתאים איבר טבעי באופן הבא:

$$\underset{1}{(1,1)},\underset{3}{(1,2)},\underset{6}{(1,3)},\underset{10}{(1,4)}$$
$$\underset{2}{(2,1)},\underset{5}{(2,2)},\underset{9}{(2,3)}$$
$$\underset{4}{(3,1)},\underset{8}{(3,2)}$$
$$\underset{7}{(4,1)}$$

קיבלנו את הסדרה הבאה:

$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),\dots$ נשים לב שהסדרה מוגדרת באופן הבא: תחילה נספרים האיברים שסכום השיעורים הוא 2, אח"כ נספרים האיברים שסכום השיעורים הוא 3, וכן הלאה...

נבנה פונקציה שמתבססת על החוקיות הנ"ל.

מספר האיברים שסכום השיעורים של הוא n שווה ל n ולכן המיקום של האיבר הראשון שסכום השיעורים שלו הוא n: $1+(1+2+3\dots+(n-2))=1+\frac{(1+n-2)(n-2)}{2}=\frac{n^2-3n+4}{2}$.

כעת השיעור הימני של האיבר במקום ה k, שסכום שיעורי איבריו הוא n, הוא k.

ולכן הפונקציה היא $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש $f(a,b)=\frac{1}{2}\cdot\left((a+b)^2-3(a+b)+2\right)+b$.

שימו לב: $f(2,3)=\frac{1}{2}\cdot\left((2+3)^2-3(2+3)+2\right)+3=9$.

מהבנייה ניתן לראות שהפונקציה היא חח"ע ועל.

משפט 4 חלק ג'

<u>מסקנה 1</u>

אם A,B קבוצות בנות מנייה אז הקבוצה $A\times B$ היא גם בת מניה.

<u>הוכחה</u>

תהיינה $f:A\to\mathbb{N},g:B\to\mathbb{N}$ פונקציות חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $h:A\times B\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ע"י $h(a,b)=(f(a),g(b))$ מכיוון ש f,g חח"ע ועל אז גם h חח"ע ועל ומכיוון ש $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ בת מנייה גם $A\times B$ בת מנייה.

<u>מסקנה 2</u>

$\mathbb{Q}$ בת מנייה.

<u>הוכחה</u>

נגדיר פונקציה $h:A\to\mathbb{N}$ ע"י $h(a_i)=i$.

הקבוצה $\mathbb{N}\setminus\{1,2,...,k\}$ היא בת מניה אינסופית, ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:C\to\mathbb{N}\setminus\{1,2,...,k\}$

נגדיר פונקציה $g:A\cup C\to\mathbb{N}$ ע"י $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in C \\ h(x) & x\in A\end{cases}$ מכיוון שהקבוצות A,C זרות אז

נקבל פונקציה חח"ע ועל.

נניח ש A,C קבוצות אינסופיות. מכיוון ש $2\mathbb{N},2\mathbb{N}-1,A,C$ הן קבוצות אינסופיות בנות מנייה קיימות פונקציות $f:C\to 2\mathbb{N},h:A\to 2\mathbb{N}-1$ חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $g:A\cup C\to\mathbb{N}$ ע"י $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in C \\ h(x) & x\in A\end{cases}$ מכיוון שהקבוצות A,C זרות אז

הפונקציה היא חח"ע ועל.

<u>מסקנה</u>

ניתן להראות באינדוקציה שאיחוד של מספר סופי של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.

<u>משפט</u>

א. אם f היא פונקציה מ A על B ו A היא קבוצה בת מנייה, אז גם B היא בת מנייה.

ב. אם $f:A\to B$ חח"ע ו B בת מניה, אז גם A בת מניה.

<u>הוכחה</u>

א. מכיוון ש $f:A\to B$ היא פונקציה על אז לכל $b\in B$ $f^{-1}\left[\{b\}\right]\neq\phi$ ולכן לכל $b\in B$ ניתן לבחור $a_b\in f^{-1}\left[\{b\}\right]$. נסמן $A'=\{a_b|b\in B\}$ מכיוון ש A היא קבוצה בת מניה ו $A'\subseteq A$ אז גם A' היא קבוצה בת מניה. נגדיר $f':A'\to B$ ע"י $f'(a_b)=b$ וקיבלנו פונקציה חח"ע ועל. נשים לב שהפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שלכל $b,c\in B$ $f^{-1}\left[\{b\}\right]\cap f^{-1}\left[\{c\}\right]=\phi$ ולכן לא יכול להיות אותו נציג לשתי קבוצות שונות.

ב. $f[A]\subseteq B$, B קבוצה בת מניה ולכן $f[A]$ קבוצה בת מניה. מכיוון ש $f:A\to B$ חח"ע הפונקציה $f':A\to f[A]$ המוגדרת ע"י $f'(a)=f(a)$ היא חח"ע ועל ולכן A בת מניה.

<u>משפט</u>

אם לכל $n\in\mathbb{N}$ A_n היא קבוצה בת מניה, אז $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ היא קבוצה בת מניה.

<u>הוכחה</u>

הראינו שהקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ היא בת מניה.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר פונקציה על $f_n:\mathbb{N}\to A_n$. קיימת כזאת מכיוון שאם A_n אינסופית קיימת פונקציה $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ חח"ע ועל ובפרט על ואם A_n סופית אז $A_n=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ נגדיר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ ע"י $f_n(x)=\begin{cases} a_t & 1\le t\le k \\ a_1 & k<t\end{cases}$.

נגדיר פונקציה $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ ע"י $g(n_1,n_2)=f_{n_1}(n_2)$ ונקבל פונקציה על.

<u>משפט קנטור</u>

תהיי A קבוצה כלשהי אז $|A|\neq|P(A)|$.

<u>הוכחה</u>

התחלה
משפט
5

נוכיח שלא קיימת פונקציה מ A על $P(A)$.

תהיי $f:A\to P(A)$ אז לכל $a\in A$ נקבל ש $f(a)\subseteq A$.

קיימות שתי אפשרויות: אפשרות 1: $a\in f(a)$ אפשרות 2: $a\notin f(a)$.

תהיי $B=\{a\in A \mid a\notin f(a)\}$. נניח שקיים $b\in A$ כך ש $f(b)=B$.

אם $b\in B$ נקבל לפי הגדרת B ש $b\notin f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

אם $b\notin B$ נקבל מהגדרת B ש $b\in f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

המשך משפט 5

<u>הגדרת סדר בין עוצמות</u>

<u>הגדרה</u>

לכל שתי קבוצות A,B נאמר ש $|A|\le|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע מ A ל B.

<u>טענה</u>

אם $A\subseteq B$ אז $|A|\le|B|$. נגדיר פונקציה $f:A\to B$ ע"י $f(a)=a$.

<u>משפט</u>

אם $|A|\le|B|\wedge|B|\le|C| \Leftarrow |A|\le|C|$.

<u>הוכחה</u>

אם $f:A\to B, g:B\to C$ הן פונקציות חח"ע אז $g\circ f:A\to C$ היא פונקציה חח"ע.

<u>הגדרה</u>

נאמר ש $|A|<|B|$ אם $|A|\le|B|$ אבל $|A|\ne|B|$.

<u>דוגמאות</u>

1. $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$ מכיוון ש $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ אז $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{R}|$ והוכחנו ש $|\mathbb{N}|\ne|\mathbb{R}|$ מסקנה $\aleph_0<\aleph$.
2. $|A|<|P(A)|$ מכיוון שהפונקציה $f:A\to P(A)$ המוגדרת ע"י $f(a)=\{a\}$ היא חח"ע אז $|A|\le|P(A)|$ והראינו קודם ש $|A|\ne|P(A)|$.

המשך משפט 5

<u>משפט</u>

אם $f:A\to B$ היא פונקציה על אז $|B|\le|A|$.

<u>הוכחה</u>

מכיוון ש $f:A\to B$ היא פונקציה על אז לכל $b\in B$ $f^{-1}[\{b\}]\ne\phi$ ולכן לכל $b\in B$ ניתן לבחור $a_b\in f^{-1}[\{b\}]$. נגדיר פונקציה $g:B\to A$ ע"י $g(b)=a_b$ הפונקציה היא חח"ע מכיוון שלכל $b,c\in B$ $f^{-1}[\{b\}]\cap f^{-1}[\{c\}]=\phi$ ולכן לא יכול להיות אותו נציג לשתי קבוצות שונות.

<u>הגדרה</u>

נאמר שהפונקציה $\psi:P(A)\to P(A)$ היא מונוטונית עולה אם $C\subseteq D \leftarrow \psi(C)\subseteq\psi(D)$.

<u>דוגמה</u>

תהיי $A=\{1,2,3\}$ ואז $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

נגדיר $\psi:P(A)\to P(A)$ באופן הבא:

$$\psi(\phi)=\{1\},\psi(\{1\})=\{1,2\},\psi(\{2\})=\{1\},\psi(\{3\})=\{1\},\psi(\{1,2\})=\{1,2\},$$
$$\psi(\{1,3\})=\{1,2\},\psi(\{2,3\})=\{1\},\psi(\{1,2,3\})=\{1,2\}$$

שימו לב שהפונקציה מונוטונית עולה וכן $\psi(\{1,2\})=\{1,2\}$.

משפט: 6

איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.

כלומר, אם I קבוצה בת מניה ולכל $i \in I$ מתקיים A_i בת מניה אזי $\bigcup_{i\in I} A_i$ בת מניה.

הוכחה:

נמצא $f: \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ חח"ע.

לכל i קיימת $g_i: A_i \to \mathbb{N}$ חח"ע.

(אם A_i אינסופית – ברור, כי היא בת מניה;

אם A_i סופית – גם די ברור)

יהי $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

כיצד נגדיר את $f(a)$?

נבחר את ה-i הקטן ביותר כך ש-$a \in A_i$.

כיוון ש-I בת מניה קיימת $h: I \to \mathbb{N}$ חח"ע.

נגדיר $f(a) = (h(i), g_i(a))$.

<u>חח"ע:</u> יהיו $a_1, a_2 \in \bigcup_{i\in I} A_i$ כך ש-

$$f(a_1) = f(a_2)$$

$$(h(i_1), g_{i_1}(a_1)) = (h(i_2), g_{i_2}(a_2))$$

$$h(i_1) = h(i_2)$$

$\Downarrow$ (חח"ע h)

$$i_1 = i_2$$

$$g_{i_1}(a_1) = g_{i_2}(a_2)$$

אבל $i_1 = i_2$ ובגלל ש-g_i חח"ע לכל i

$$a_1 = a_2$$

■