

## תרגיל 6

מתרגלת: אורפז תורג'מן [orpaz.biu@gmail.com](mailto:orpaz.biu@gmail.com)  
תאריך הגשה: 4/06/2012

- (1) יהיו  $l, l'$  שני ישרים פרוייקטיביים.  
על  $l$  נבחר 4 נקודות:  $p, q, r, x$  ועל  $l'$  נבחר 3 נקודות:  $p', q', r'$ .  
יהי  $f: l \rightarrow l'$  העתקה פרוייקטיבית המעבירה:  $p \rightarrow p', q \rightarrow q', r \rightarrow r'$ .  
נסמן:  $x' = f(x) \in l'$ .  
השתמשו בעובדה כי העתקה פרוייקטיבית שומרת על היחס הכפול והוכיחו כי:  
$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$
 כאשר  $a, b, c, d$  תלויים בנקודות:  $p, q, r, p', q', r'$ .

הגדרה: ההעתקה  $f: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ ,  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  נקראת טרנספורמציה מביוס  
והיא מוגדרת ע"י ההעתקה בנקודות:  $0, 1, \infty$ .  
ז"א:  $f(0) = \frac{b}{d}$ ,  $f(1) = \frac{a+b}{c+d}$ ,  $f(\infty) = \frac{a}{c}$  כאשר  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

**משפט:** כל העתקה פרוייקטיבית מ- $\mathbb{R}P^1$  ל- $\mathbb{R}P^1$  היא מהצורה הנ"ל.

- (2) בנו את המשוואה של ההעתקה הפרוייקטיבית מ- $\mathbb{R}P^1$  ל- $\mathbb{R}P^1$  שמעבירה את הנקודות  $1, 3, \infty$  ל- $5, 4, \infty$  בהתאמה.
- (3) א. האם קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי  $\mathbb{R}P^1$  לעצמו השולחת את  $1, 2, 3, 4$  ל- $0, 2, 1, -1$  בהתאמה?  
ב. האם קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי  $\mathbb{R}P^1$  לעצמו השולחת את הקבוצה  $\{1, 2, 3, 4\}$  לקבוצה  $\{0, 2, 1, -1\}$ ? אם כן, מצא אותה.
- (4) א. האם קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי  $\mathbb{R}P^1$  לעצמו השולחת את 0 ל-1, את 2 ל- $\infty$ , את 3 ל-3 ואת 4 ל-0?  
ב. הוכיחו שקיימת העתקה פרוייקטיבית השולחת את הקבוצה  $\{0, 2, 3, 4\}$  לקבוצה  $\{1, \infty, 3, 0\}$  ומצאו אותה במפורש. (ז"א  $a, b, c, d$  כך ש- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ).  
לאן ההעתקה שולחת את 2?

בהצלחה!