

## פיסיקה למתמטיקאים

### מבוא לתורת הקוונטים: הסתברות

1. הראו כי ניתן לקרב את התפלגות ברנולי  $B(n, p)$  (ההסתברות לקבל  $k$  "הצלחות" ב  $n$  נסיונות) ע"י התפלגות פואסון  $Poisson(\lambda)$  כאשר  $\lambda \rightarrow np$ .

נציב  $p = \lambda/n$  ונרשום

$$B(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

כעת בגבול  $n \rightarrow \infty$  נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, p) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = Poisson(\lambda),$$

כאשר

$$\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k \leq \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{n^k} \leq \frac{n^k}{n^k} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = 1 \text{ ולכן}$$

2. נתונה פונקציית צפיפות ההסתברות הבאה

$$f_X(x) = \begin{cases} A \cos^2 \frac{\pi x}{2a} & |x| \leq a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(א) מצאו את קבוע הנרמול  $A$

$$A = 1/a \text{ מתנאי הנרמול } A \int_{-a}^a \cos^2 \frac{\pi x}{2a} dx = 1 \text{ נקבל}$$

(ב) מצאו את  $EX$  ואת  $\Delta X$

$$EX = a^{-1} \int_{-a}^a x \cos^2 \frac{\pi x}{2a} dx = 0$$

$$EX^2 = a^{-1} \int_{-a}^a x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} dx = a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right)$$

$$\Delta X = \sqrt{EX^2} = a \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right)} \text{ ולכן}$$

(ג) מה הסיכוי לקבל ערך  $0 \leq x \leq \infty$  ?

מאחר שפונקציית צפיפות ההסתברות זוגית נקבל

$$P\{X = x \in [0, \infty)\} = 1/2$$