פתרון תרגיל בית 1 אלגברה מופשטת 2

1. מי מהתת-קבוצות הבאות של $\mathbb{Q}$ הן תת-חוגים? (אם הקבוצה היא לא תת חוג- יש לתת הסבר קצר).

(א) $\left\{ \frac{a}{2b} \,|\, a,b \in \mathbb{Q} \right\}$ (כאשר השבר כתוב בצורה מצומצמת).

זהו לא תת-חוג שכן למרות ש $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ הם איברים שם, החיסור $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$ לא נמצא שם.

(ב) $\left\{ \frac{a}{2b+1} \,|\, a,b \in \mathbb{Q} \right\}$ (כאשר השבר כתוב בצורה מצומצמת).

זהו תת חוג. שכן 0 נמצא שם בודאי.

ולכל $\frac{a}{2b+1}, \frac{c}{2d+1}$ מתקיים ש $\frac{a}{2b+1} - \frac{c}{2d+1} = \frac{a(2d+1)-c(2b+1)}{2b+1}$

וגם $\frac{a}{2b+1} \cdot \frac{c}{2d+1} = \frac{ac}{(2b+1)(2d+1)}$ נמצאים שם. (נשים לב שגם לאחר צמצום המכנה ישאר אי-זוגי).

(ג) $\mathbb{Q}^+ = \{ q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0 \}$

זה לא תת-חוג כי אין סגור לנגדי.

(ד) $\left\{ \frac{2a+1}{b} \,|\, a,b \in \mathbb{Q} \right\}$ (כאשר השבר כתוב בצורה מצומצמת).

זהו לא תת-חוג כי למשל $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}$ לא נמצא שם (למרות שהמחוברים כן).

(ה) $\mathbb{Q}^2 = \{ q^2 \,|\, q \in \mathbb{Q} \}$

זהו לא תת-חוג כי למשל אין סגור לנגדי.

2. תהי $\{S_i\}_{i \in I}$ קבוצה של תת חוגים (לאו דוקא סופית או בת-מניה) של חוג R. הוכיחו כי החיתוך $\bigcap_{i \in I} S_i$ הוא גם תת-חוג.

פתרון:

ברור כי $0, 1$ נמצאים שם כי הם נמצאים בכל תת-חוג.

יהיו $a, b \in \bigcap_{i \in I} S_i$ אזי $a, b \in S_i$ לכל $i \in I$ ולכן $a \pm b, ab \in S_i$ לכל $i \in I$ (כי הם תת-חוגים) ולכן $a \pm b, ab \in \bigcap_{i \in I} S_i$.

3. נתבונן בחוג $C\left[0,1\right]$ של פונקציות ממשיות רציפות ב$[0,1]$(זהו חוג ביחס לחיבור וכפל פונקציות- לא הרכבה!).

(א) האם הוא חוג עם חילוק? תחום?

זהו לא חוג עם חילוק כי למשל הפונקציה $f(x) = x$ היא בודאי רציפה, אך איננה הפיכה כי היא מתאפסת.

זהו לא תחום, ניקח למשל את הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1/2 \\ x-1/2 & 1/2 \leq x \end{cases}$ ו $g(x) = \begin{cases} 1/2-x & x \leq 1/2 \\ 0 & x \geq 1/2 \end{cases}$ קל לראות שהן רציפות ומכפלתן היא אפס.

(ב) תהי פונקציה $f \in C\left[0,1\right]$ המתאפסת על מספר בן מנייה של איברים, האם היא הפיכה? מחלקת אפס?

ראשית, פונקציה כזאת בודאי לא הפיכה כי היא מתאפסת בנקודה. והיא גם לא פונקצית האפס.

נניח בשלילה שהיא מחלקת אפס, אז יש פונקציה $0 \neq g(x) \in C[0,1]$ כך ש $f(x)g(x) = 0$. עבור כל נקודה שבה $f(x) \neq 0$ מתקיים בהכרח ש $g(x) = 0$, מה שאומר שg לא מתאפסת במספר לכל היותר בן מנייה של נקודות. אבל g רציפה ולכן אם בה"כ $g(x_0) > 0$ אז יש סביבה $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ כך ש $g\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right) > 0$ מה שאומר שg לא מתאפסת בקטע שלם- מה שמכריח רצף של נקודות וזו סתירה.

(ג) האם אוסף הפולינומים מעל הממשיים $\mathbb{R}[x]$ היא תת-חוג?

כן. ידוע שזה חוג (ביחס לאותן פעולות) והוא מוכל בחוג $C[0,1]$ כי כל פולינום הוא רציף.

(לדקדקנים: אפשר לדייק ולומר שחוג הפולינומים משוכן בC בתור תת-חוג. כאשר השיכון הוא לקחת פולינום (שהוא צירוף ליניארי של חזקות של x) ולחשוב עליו בתור פונקציה ממשית, תוך שאנחנו מצמצמים את התחום שלה לקטע $[0,1]$).

4. יהי R חוג. איבר $x \in R$ המקיים $x^n = 0$ לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$ נקרא איבר נילפוטנטי.

(א) וודאו לעצמכם: נילפוטנטים הם מחלקי אפס. האיבר הנילפוטנטי היחיד בתחום הוא 0.

(ב) הוכיחו עבור חוג קומוטטיבי R כי אם $x \in R$ נילפוטנטי, אז rx נילפוטנטי לכל $r \in R$. תנו דוגמא נגדית עבור חוג לא קומוטטיבי.

למעשה לא צריך חוג קומוטטיבי, מספיק ש $rx = xr$.

פתרון:

x נילפוטנטי ולכן $x^n = 0$ לאיזשהו n. מכיוון ש x ו r מתחלפים
$(rx)^n = (rx)(rx)\cdots(rx) = r^n x^n = 0$ ולכן rx נילפוטנטי.

(ג) הוכיחו כי אם $x \in R$ נילפוטנטי, אז $1 - x$ הפיך.

פתרון:
נניח ש $x^n = 0$ אזי $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1$ (בדקו!). ולכן הוא הפיך.

(ד) הוכיחו כי אם $x \in R$ נילפוטנטי, $y \in R$ הפיך ו$xy = yx$ אז $x + y$ הפיך.

פתרון:
נרשום $y + x = y(1 - (-y^{-1}x))$.
לפי סעיף ב' $-y^{-1}x$ נילפוטנטי, כי נתון שy מתחלף עם x אבל זה גורר ש$-y^{-1}$ מתחלף עם x (למה?).
ולכן לפי סעיף ג' $1 - (-y^{-1}x)$ הפיך, ונתון שy הפיך ולכן גם מכפלתם הפיכה.

5. יהי חוג $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$. הוכח שכל איבריו נילפוטנטים מסדר 2 (כלומר $x^2 = 0$ לכל $x \in R$) אבל הוא אינו קומוטטיבי.

פתרון:
כדי לראות שכל איבר נילפוטנטי - חישוב מיידי וקצר.
החוג לא קומוטטיבי כי למשל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. יהי R חוג. ויהיו איברים $x, y \in R$ כך ש $xy = 1$ אבל $yx \neq 1$. הוכיחו כי קיים איבר $0 \neq z \in R$ כך ש $xz = zy = 0$.

פתרון:
מהשיוויון $xy = 1$ נוכל לקבל מצד אחד $xyx = x$ ולכן $x(yx-1) = 0$, ונשים לב שלפי הנתון $yx - 1 \neq 0$.
מצד שנינוכל לקבל $yxy = y$ ולכן $(yx-1)y = 0$.

7. יהי R חוג המקיים שכל איבריו הם אידמפוטנטים, כלומר $\forall x \in R,\ x^2 = x$ (חוג כזה נקרא בוליאני). הוכח שבחוג כזה מתקיים $x + x = 0$ לכל $x \in R$, ושהוא קומוטטיבי.

פתרון:
נעיר ש$-1 = (-1)^2$ גורר ש $1 = -1$ בחוג כזה. ובפרט $x + x = x - x = 0$.

מכיוון שהחוג בוליאני $x+y=(x+y)^2$ מה שנותן $0=xy-yx=xy+yx$ ולכן החוג קומוטטיבי.