בס"ד

<u>משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240</u>

<u>תרגילים 10</u>

1. (א) הוכח שניתן לכתוב את משפט הבינום של ניוטון בצורה

$$(1+x)^a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-i)\Gamma(i+1)} x^i \qquad |x|<1$$

כאן a אינו שלם, אבל יש להסביר באיזה מובן הנוסחה היא נכונה גם כאשר a הוא שלם לא שלילי.

(ב) הוכח, על ידי הצבות באנטגרל הרלוונטי, ש-

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\log z}}$$

(א) בדרך כלל כותבים את משפט הבינום בצורה

$$(1+x)^a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-i+1)}{i!} x^i$$

במקרה ש- a הוא שלם חיובי הטור הוא סופי, כל האיברים עם $i>a$ מתאפסים בגלל שאחד הגורמים במונה הוא 0. אם a אינו שלם אזי

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = a(a-1)\Gamma(a-1) = \dots = a(a-1)\dots(a-i+1)\Gamma(a-i+1)$$

ולכן ניתן לכתוב

$$a(a-1)\dots(a-i+1) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-i+1)}$$

היות ו- $i! = \Gamma(i+1)$ מקבלים את הצורה המוצעה של המשפט. אם a הוא שלם שלילי יהיה בעיה בהגדרה של $\Gamma(a+1)$ וגם של $\Gamma(a+1-i)$ ולא ניתן להשתמש בנוסחה זו. אם a הוא שלם לא שלילי, אין בעיה בהגדה של $\Gamma(a+1)$ אבל עבור $i>a$, $\Gamma(a-i+1)$ אינו מוגדר. בכל אופן, במקרה זה ניתן להשתמש בנוסחה בתנאי שמבינים ש- $\frac{1}{\Gamma(p)} = 0$ כאשר $p = 0, -1, -2, \dots$.

(ב)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t}\, dt$$

אם מציבים $t = y^2$ מקבלים

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} y^{-1} e^{-y^2} 2y\, dy = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

על ידי זוגיות של e^{-y^2}.

אם מציבים $t = -\log z$ מקבלים

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{-\log z}} z \left(-\frac{1}{z}\right)\, dz = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{-\log z}}$$

---

2. הוכח מיחסי הרקורסיה לפונקציות בסל

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) &= \frac{2nJ_n(x)}{x} \\ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) &= -2J_n'(x) \end{aligned}$$

ש- $J_n(x)$ מקיים את משוואת בסל

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

הפרש הרקורסיות:

$$J_{n-1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} + J_n'(x) \tag{1}$$

נכפיל על ידי x לקבל

$$xJ_n'(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x) \tag{2}$$

נגזור את (2):

$$xJ_n''(x) + (n+1)J_n'(x) = xJ_{n-1}'(x) + J_{n-1}(x) \tag{3}$$

נכפיל שוב על ידי x:

$$x^2 J_n''(x) + (n+1)xJ_n'(x) = x^2 J_{n-1}'(x) + xJ_{n-1}(x) \tag{4}$$

ונחסר n כפול משוואה (2):

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) - n^2 J_n(x) = x^2 J_{n-1}'(x) + x(1-n)J_{n-1}(x) \tag{5}$$

סכום שתי הרקורסיות נותן

$$J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J_n'(x) \tag{6}$$

מכפילים על ידי x לקבל

$$xJ_{n+1}(x) = nJ_n(x) - xJ_n'(x) \tag{7}$$

ורושמים $n-1$ במקום n לקבל

$$xJ_n(x) = (n-1)J_{n-1}(x) - xJ_{n-1}'(x) \tag{8}$$

אם משווים את (5) ו- (8) רואים שצד ימין של (5) שווה $-x$ כפול צד ימין של (8). ולכן

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) - n^2 J_n(x) = -x^2 J_n(x) \tag{9}$$

כנדרש.

---

3. הוכח את יחסי הרקורסיה לפונקציות בסל מהייצוג האנטגרלי של פונקציות בסל

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\ d\theta$$

מהייצוג האנטגרלי יש לנו

$$\begin{aligned}
J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((n+1)\theta - x\sin\theta\right)\ d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((n-1)\theta - x\sin\theta\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\left((n+1)\theta - x\sin\theta\right) + \cos\left((n-1)\theta - x\sin\theta\right)\right)\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\left(n + x\cos\theta - n\right)\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \left(\frac{d}{d\theta}\sin\left(n\theta - x\sin\theta\right) - n\cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\right)\ d\theta \\
&= \frac{2}{\pi x}\left[\sin\left(n\theta - x\sin\theta\right)\right]_0^\pi - \frac{2n}{\pi x}J_n(x) \\
&= -\frac{2n}{\pi x}J_n(x)
\end{aligned}$$

כאן השתמשנו, בין היתר, בזהות $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$.
כמו כן:

$$\begin{aligned}
J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((n+1)\theta - x\sin\theta\right)\ d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left((n-1)\theta - x\sin\theta\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\left((n+1)\theta - x\sin\theta\right) - \cos\left((n-1)\theta - x\sin\theta\right)\right)\ d\theta \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(n\theta - x\sin\theta\right)\sin\theta\ d\theta \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d}{dx}\left(\cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\right)\ d\theta \\
&= -2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\theta - x\sin\theta\right)\ d\theta\right) \\
&= -2J_n'(x)
\end{aligned}$$

כאן השתמשנו, בין היתר, בזהות $\cos(A+B)+\cos(A-B) = -2\sin A\sin B$.

---

4. כאשר $\nu = n + \frac{1}{2}$, n שלם לא שלילי, הוכח שניתן לכתוב כל פתרון של משוואת בסל

$$x^2 J_\nu''(x) + xJ_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2)J_\nu(x) = 0$$

בצורה

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} j_n(x)$$

כאשר $j_n(x)$ פותר את המשוואה

$$x^2 j_n''(x) + 2xj_n'(x) + \left(x^2 - n(n+1)\right) j_n(x) = 0$$

(קוראים לפונקציות $j_n(x)$ פונקציות בסל כדוריות.) הוכח ש-

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}$$

הוא פתרון של משוואה זו, ומצא במפורש את j_0, j_1, j_2.

אם

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} j_n(x)$$

אזי

$$J_\nu'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{x} j_n'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} j_n(x)\right)$$

ו-

$$J_\nu''(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{x} j_n''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} j_n'(x) - \frac{1}{4x^{3/2}} j_n(x)\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 J_\nu''(x) + xJ_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2)J_\nu(x) \\
&= x^2 \left(\sqrt{x} j_n''(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} j_n'(x) - \frac{1}{4x^{3/2}} j_n(x)\right) + x \left(\sqrt{x} j_n'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} j_n(x)\right) \\
&\quad + \left(x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) \sqrt{x} j_n(x) \\
&= x^2 j_n''(x) + 2xj_n'(x) + \left(x^2 - n(n+1)\right) j_n(x) \qquad (*)
\end{aligned}$$

במעבר בין השורה הראשונה לשנייה השמטתי גורם משותף של $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ובמעבר בין שורה השנייה לשלישית השמטתי גורם משותף של $\sqrt{x}$.

נחפש פתרון של המשוואה ל- $j_n(x)$ בצורה $j_n(x) = x^n f_n(x)$. אזי יש לדרוש

$$x^2 \left(x^n f_n'' + 2nx^{n-1} f_n' + n(n-1)x^{n-2} f_n\right) + 2x \left(x^n f_n' + nx^{n-1} f_n\right) + \left(x^2 - n(n+1)\right) x^n f_n = 0$$

כלומר

$$xf_n'' + 2(n+1)f_n' + xf_n = 0 \qquad (**)$$

נגדיר $y=\frac{1}{2}x^2$ כך ש-

$$\frac{df_n}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{df_n}{dy}=x\frac{df_n}{dy}$$

ו-

$$\frac{d^2f_n}{dx^2}=\frac{df_n}{dy}+x\frac{d^2f_n}{dy^2}\frac{dy}{dx}=\frac{df_n}{dy}+x^2\frac{d^2f_n}{dy^2}$$

המשוואה נותנת

$$x\left(\frac{df_n}{dy}+x^2\frac{d^2f_n}{dy^2}\right)+2(n+1)x\frac{df_n}{dy}+xf_n=0$$

כלומר

$$2y\frac{d^2f_n}{dy^2}+(2n+3)\frac{df_n}{dy}+f_n=0 \qquad (***)$$

עכשיו נניח שיש לנו פתרון של המשוואה הזאת במקרה $n=0$, כלומר אנחנו יודעים f_0 כך ש-

$$2y\frac{d^2f_0}{dy^2}+3\frac{df_0}{dy}+f_0=0$$

נגזור n פעמים:

$$2\left(y\frac{d^{n+2}f_0}{dy^{n+2}}+n\frac{d^{n+1}f_0}{dy^{n+1}}\right)+3\frac{d^{n+1}f_0}{dy^{n+1}}+\frac{d^nf_0}{dy^n}=0$$

רואים ש- $f_n=\frac{d^nf_0}{dy^n}$ הוא פתאון של המשוואה $(***)$. אם חוזרים לקואורדינטה ולפונקציה המקורית, רואים ש-

$$f_n(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^nf_0(x)$$

הוא פתאון של $(**)$ אם f_0 הוא פתרון במקרה $n=0$, וש-

$$j_n(x)=x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^nj_0(x)$$

הוא פתרון של $(*)$ אם j_0 הוא פתרון במקרה $n=0$.
רק נשאר לבדוק ש- $j_0(x)=\frac{sinx}{x}$ הוא פתרון של $xj_0''+2j_0'+xj_0'=0$, כלומר ש- $(xj_0)''=-xj_0$, שזה טריביאלי, היות ו- $\sin''(x)=-\sin x$.

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}\\
j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}\\
j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^2}-1\right)\frac{\sin x}{x}-\frac{3\cos x}{x^2}
\end{aligned}$$

---

5. הוכח מיחסי הרקורסיה לפולינומי לז'נדר

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, \ldots \\ \frac{x^2-1}{n}P_n'(x) &= xP_n(x) - P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ש- $P_n(x)$ מקיים את משוואת לז'נדר

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

מהרקורסיה השנייה:

$$(1-x^2)P_n'(x) = n\left(P_{n-1}(x) - xP_n(x)\right) \qquad (*)$$

גוזרים לקבל

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = n\left(P_{n-1}'(x) - xP_n'(x) - P_n(x)\right) \qquad (**)$$

מ- $(*)$

$$\begin{aligned} (1-x^2)\left(P_{n-1}'(x) - xP_n'(x)\right) &= (n-1)\left(P_{n-2}(x) - xP_{n-1}(x)\right) - xn\left(P_{n-1}(x) - xP_n(x)\right) \\ &= (n-1)P_{n-2}(x) - x(2n-1)P_{n-1}(x) + nx^2P_n(x) \end{aligned}$$

אבל מיחס הרקורסיה הראשון, עם n הוחלף ל- $n-1$

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

ולכן

$$(1-x^2)\left(P_{n-1}'(x) - xP_n'(x)\right) = -nP_n(x) + nx^2P_n(x) = -n(1-x^2)P_n(x)$$

או

$$P_{n-1}'(x) - xP_n'(x) = -nP_n(x)$$

אם משתמשים במשוואה האחרונה ב- $(**)$ מקבלים

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = n\left(-nP_n(x) - P_n(x)\right) = -n(n+1)P_n(x)$$

כלומר

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

כנדרש.

---

6. (א) העזר בפונקציה היוצרת של פולינומי לז'נדר למצוא את $P_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
(ב) העזר בנוסחת רודריגס למצוא את $P_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
(ג) העזר ביחס הרקורסיה הראשון של פולינומי לז'נדר למצוא את $P_n(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(א) מוסחת הרקורסיה עם $x = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) t^n$$

נשתמש במשפט הבינום:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) t^n$$

רואים מיד ש $P_n(0) = 0$ אם n אי זוגי. ו-

$$P_{2n}(0) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

היות וגם ניתן לכתוב

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

אפשר גם לכתוב

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

(ב) נוסחת רודריגז:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}\left(-x^2\right)^i$$

על ידי משפט הבינום. בטור יש רק איברים זוגיים. אם n הוא אי זוגי, כאשר גוזרים יהיו רק איברים אי-זוגיים, ולכן כאשר אח"כ נציב $x = 0$ נקבל 0. כאשר n הוא זוגי, האיבר היחיד שיתרום הוא זה עם $i = \frac{n}{2}$. (כל האיברים עם i קטן מזה נעלמים כאשר גוזרים. כל האיברים עם i גדול מזה משאירים חזקה של x גדול מ-0 אחרי הנגזרות, ולכן מתאפסים כאשר מציבים $x = 0$.) ולכן עביר n זוגי יש

$$P_n(0) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^n n!} \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)!} n!$$

(הגורם האחרון של $n!$ מהנגזרות.) נכתוב $n = 2m$:

$$P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{m!} = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

(ג) הרקורסיה הראשונה כאשר $x = 0$ הוא

$$P_{n+1}(0) = \frac{-n}{n+1} P_{n-1}(0)$$

ידוע ש- $P_0(0) = 1$ ו- $P_1(0) = 0$. מיד ברור ש- $P_n(0) = 0$ כאשר n הוא אי זוגי. כאשר n זוגי יש לנו

$$\begin{aligned} P_{2m}(0) &= \frac{-(2m-1)}{2m} P_{2m-2}(0) \\ &= \frac{-(2m-1)}{2m} \frac{-(2m-3)}{2m-2} P_{2m-4}(0) \\ &= \dots \\ &= (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \end{aligned}$$

ולכן

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{((2m)!!)^2} = (-1)^m \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}$$
