תרגול 9

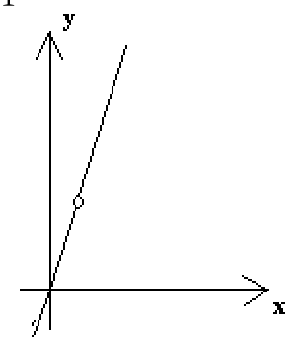
נושא השיעור: 3 – סוגי אי רציפות, רציפות במידה שווה, הגדרת הנגזרת.

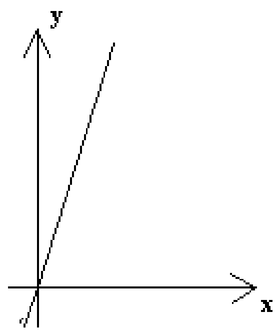
<u>מיון נקודות אי רציפות</u>

<u>נקודת אי רציפות סליקה</u>

לפני שנגדיר נקודת אי רציפות סליקה נתחיל בדוגמא.

נתבונן בגרף של הפונקציה $f(x)=2x$ ובגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2-2x}{x-1}$.





נשים לב שהפונקציות זהות לחלוטין למעט נקודה אחת $(1,2)$.

אם נוסיף את הנקודה $(1,2)$ לגרף השמאלי נקבל פונקציה רציפה שהיא הגרף הימני.

נקודה $(1,2)$ ממחישה את ההגדרה של נקודת אי רציפות סליקה. כעת נעבור להגדרה הפורמאלית.

<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 (במובן הצר) קיימים ושווים אבל הגבול שונה מ $f(x_0)$ או ש $f(x)$ כלל אינה מוגדרת בנקודה x_0 , אז לפונקציה יש ב x_0 נקודת אי רציפות סליקה.

<u>דוגמאות</u>

1. בדוגמא הקודמת הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2-2x}{x-1}$ לא מוגדרת בנקודה $x_0=1$ ומתקיים $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)$ ולכן לפונקציה יש נקודת אי רציפות סליקה ב $x_0=1$.
2. נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x-10}{x-2} & x\neq2\\ 3 & x=2\end{cases}$. במקרה זה $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)=7\neq f(2)$ אומנם הפונקציה מוגדרת ב $x_0=2$ אבל היא עדיין אי רציפה בנקודה זו.

<u>אי רציפות מסוג ראשון</u>

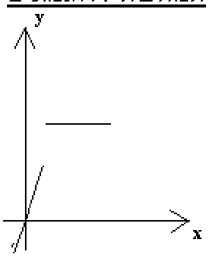
<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 קיימים ושונים (במובן הצר) נאמר שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון.

<u>דוגמא 1</u>

נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}6 & x>2\\ 2x & x\leq2\end{cases}$. במקרה זה מתקיים $\lim_{x\to2^+}f(x)\neq\lim_{x\to2^-}f(x)$.

<u>המחשה לדוגמא 1</u>



<u>דוגמא 2</u>

$f(x)=\frac{|\sin x|}{x}+3$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4$ נקבל שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון בנקודה $x_0=0$.

<u>אי רציפות מסוג שני</u>

נקודה x_0 נקראת נקודת אי רציפות מסוג שני של הפונקציה $f(x)$ אם:

א. $f(x)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0, פרט אולי ל x_0 עצמה.

ב. לפחות אחד מן הגבולות החד צדדיים בנקודה x_0 אינו קיים.

<u>דוגמא 1</u>

הפונקציה $f(x)=\sin\frac{1}{x-1}$ אי רציפה מסוג שני בנקודה $x_0=1$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ אינו קיים, במקרה זה גם הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ לא קיים.

<u>דוגמא 2</u>

$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ במקרה זה הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ קיים אבל הגבול $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ לא קיים ולכן הנקודה $x_0=0$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני.

<u>רציפות במידה שווה</u>

<u>הגדרה על פי קושי</u>

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר כי f רציפה במידה שווה ב I אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in I$ מתקיים $|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

<u>הערה</u>

בחירת δ תלויה רק ב ε ולא בנקודות $x_1,x_2\in I$.

<u>הגדרה על פי היינה (טובה בד"כ לשלילה)</u>

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר כי f רציפה במידה שווה ב I אם:

לכל $x_n,y_n\in I$ מתקיים $|x_n-y_n|\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow |f(x_n)-f(y_n)|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי הפונקציה $\ln x$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$.

<u>פתרון</u>

הנקודה הבעייתית היא 0. נמצא שתי סדרות בקטע $(0,1)$ ששואפות לאפס כך שההפרש ביניהן שואף לאפס אבל בהצבתן נקבל ביטוי שלא שואף לאפס. $x_n=\frac{1}{n}, y_n=\frac{1}{2n}$ אבל $\left|\ln\frac{1}{n}-\ln\frac{1}{2n}\right|=\ln 2$

<u>משפט קנטור</u>

פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ רציפה בו במידה שווה.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ רציפה במידה שווה בקטע הפתוח $(0,1)$.

<u>פתרון</u>

נרחיב את הפונקציה לקטע הסגור $[0,1]$.

ונקבל פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן לפי משפט קנטור $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & 0<x\le 1\\ 1 & x=0\end{cases}$

הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ במידה שווה ובפרט בקטע הפתוח $(0,1)$.

<u>פונקציה מונוטונית</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים
$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים
$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$.

<u>דוגמא</u>

הפונקציה $f(x)=\ln x$ עולה ממש בתחום $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$.

נראה זאת לפי ההגדרה: יהיו $x_1,x_2\in D$ כך ש $x_1<x_2$ כעת $f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}$ מכיוון ש

$0<x_1<x_2$ נקבל ש $\frac{x_2}{x_1}>1$ ולכן $f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$ ואז הפונקציה $f(x)$ עולה ממש.

<u>תרגיל</u>

נתון שהפונקציות f,g עולות ממש ב $\mathbb{R}$ הוכח שהפונקציה $f\circ g$ גם עולה ממש.

<u>פתרון</u>

יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $x_1<x_2$. $f\circ g(x_2)-f\circ g(x_1)=f(g(x_2))-f(g(x_1))$.

מכיוון ש g פונקציה עולה ממש ומכיוון ש $x_1<x_2$ נקבל ש $y_1:=g(x_1)<y_2:=g(x_2)$ ואז

$y_1,y_2\in\mathbb{R}$ כך ש $y_1<y_2$ ומכיוון ש f פונקציה עולה ממש נקבל ש

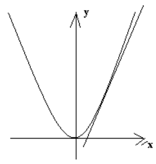
$f\circ g(x_2)-f\circ g(x_1)=f(g(x_2))-f(g(x_1))=f(y_2)-f(y_1)>0$ כדרוש.

<u>הנגזרת</u>

<u>הגדרת הנגזרת</u>

מטרה – חישוב שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0.

נרצה לחשב את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=x^2$ בנקודה $x=2$.



המשיק עובר בנקודה $\left(2,4\right)$. לא ניתן לחשב את שיפוע הישר בעזרת נקודה אחת בלבד.

ניקח נקודה שנמצאת על הפונקציה נניח $\left(3,9\right)$ נחשב את השיפוע ונקבל $m=5$.

ככל שניקח נקודה קרובה יותר לנקודה $\left(2,4\right)$ נקבל שיפוע יותר קרוב לשיפוע המשיק.

נרשום את התוצאות בטבלה.

x	$3=2+1$	$2.5=2+0.5$	$2.1=2+0.1$	$2.01=2+0.01$
y	9	$\left(2+0.5\right)^2$	$\left(2+0.1\right)^2$	$\left(2+0.01\right)^2$
m	5	4.5	4.1	4.01

נשים לב שכאשר אנחנו לוקחים נקודה "קרובה" יותר לנקודה $\left(2,4\right)$ השיפוע מתקרב ל 4 .

באופן כללי אם ניקח את הנקודה $\left(2+h,\left(2+h\right)^2\right)$ נקבל שהשיפוע הוא

$$m=\frac{\left(2+h\right)^2-2^2}{2+h-2}=\frac{\left(2+h\right)^2-2^2}{h}=\frac{4+4h+h^2-2^2}{2+h-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h\ .$$

נשים לב שככל המרחק בין הנקודה שעל הפונקציה לנקודה הנתונה $\left(2,4\right)$ קרוב יותר לאפס (ז"א h קרוב לאפס) השיפוע קרוב יותר ל 4 .

<u>הגדרת הנגזרת</u>

העיקרון של הגדרת הנגזרת מתבסס על הרעיון בחישוב שיפוע המשיק בדוגמא הקודמת.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\ .$$

<u>תרגיל</u>

חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f\left(x\right)=\sin x$.

<u>פתרון</u>

על פי הגדרת הנגזרת, שימוש בזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ והגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

<u>הגדרה</u>

תהיי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$.

אם קיים הגבול $L=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ אז נאמר כי הפונקציה f גזירה בנקודה $x=x_0$, ונרשום $f'(x_0)=L$. המספר L ייקרא הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x=x_0$.

<u>דוגמאות</u>

1. חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x)=\sqrt{x}$ בנקודה $(4,2)$.

על פי הגדרת הנגזרת

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}=\lim_{h\to 0}\frac{4+h-4}{h\cdot\sqrt{4+h}+2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$$

2. חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x)=e^x$ בנקודה $(0,1)$.

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ המספר e מוגדר כך ש $\lim_{h\to 0}e^h=\lim_{h\to 0}(1+h)$ ז"א $e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$, ואז

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h}=1$.

3. חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f(x)=\sin x$ בנקודה $x=x_0$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x_0+h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}\cdot\cos\frac{2x_0+h}{2}=\cos x_0$$

השוויון הראשון נובע מהגדרת הנגזרת.

השוויון השני נובע מהזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

השוויון השלישי נובע מהגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

<u>נגזרות חד צדדיות</u>

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מסוימת של הנקודה $x=x_0$.

הגבול $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, אם הוא קיים, נקרא הימנית של $f(x)$ בנקודה x_0 , היא מסומנת ע"י $f'_+(x_0)$. באופן דומה נגדיר נגזרת שמאלית בנקודה x_0 ונסמנה ע"י $f'_-(x_0)$.

<u>תרגיל 1</u>

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=|x|$ בנקודה $x=0$.

<u>פתרון</u>

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=-1$$

<u>תרגיל 2</u>

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\ge 1 \\ 3x-4 & x<1 \end{cases}$ בנקודה $x=1$.

<u>פתרון</u>

על פי הגדרת הפונקציה, אם $h>0$ אזי $f(1+h)=(1+h)^2-2$, ואם $h<0$ אזי $f(1+h)=3(1+h)-4$.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-2-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h+h^2-2+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)-4-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3+3h-4+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3 .$$

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 . אזי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנקודה x_0 והן שוות.

אם קיימת הנגזרת או אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות והן שוות אז יתקיים השוויון $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

<u>דוגמא</u>

הפונקציות בתרגילים 1,2 לא גזירות.

<u>תרגיל 3</u>

הוכח כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 6x+9 & x\ge 2 \\ 15+\frac{3x^2}{2} & x<2 \end{cases}$ גזירה בנקודה $x=2$.

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב שהפונקציה רציפה בנקודה $x=2$ מכיוון ש $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=21$.

נשים לב ש $f'_+(2)=f'_-(2)=6$. לכן מן המשפט הקודם הפונקציה גזירה בנקודה $x=2$ ומתקיים $f'(2)=6$.