בוחן טופולוגיה תשפב

1.5.2022 שעת התחלה: 9:00

מרצה: פרופסור מיכאל מגרל. מתרגלים: תמר בר-און, רועי שלו.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות. זמן מוקצב: שעה ורבע.
- כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

.

בהצלחה!

1. (כל סעיף 15 נקודות) על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$, נגדיר את הפונקציה

$$d(x,y)=\begin{cases}|x|+|y| & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

(כאשר $|x|$ הוא הערך המוחלט של x).

(א) הוכיחו כי d היא מטריקה על $\mathbb{R}$.
פתרון: נבדוק לפי הגדרה:

- אי שליליות: מתקיים כי לכל x,y שונים

$$d(x,y)=|x|+|y|>0$$

כאשר ההצדקה לאי-השיוויון הוא ש $x\neq 0$ או $y\neq 0$. ועבור $x=y$, לפי הגדרה $d(x,y)=0$. לכן, לכל x,y מתקיים $d(x,y)\geq 0$ ושיוויון לאפס אמ"מ $x=y$.

- סימטריות: לכל x,y שונים

$$d(x,y)=|x|+|y|=|y|+|x|=d(x,y)$$

ועבור $x=y$ מתקיים $d(x,y)=0=d(y,x)$.

- אי-שיוויון המשולש: לכל x,y,z מתקיים ש: אם $x\neq y$ וגם $z\neq y$ אזי

$$d(x,z)\leq |x|+|z|\leq |x|+|y|+|y|+|z|=d(x,y)+d(y,z)$$

ואם $x=y$ או $z=y$ אזי $d(x,z)=d(y,z)$ או $d(x,z)=d(x,y)$ ולכן

$$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

(ב) תהא x ממשית. הוכיחו: x נקודה מבודדת ב $(\mathbb{R},d)$ אם ורק אם $x\neq 0$.
פתרון: בכיוון $(\Rightarrow)$ נניח $x\neq 0$ אזי לכל $y\neq x$ מתקיים כי

$$d(x,y)=|x|+|y|\geq |x|$$

ולכן $B(x,x)=\{x\}$ (כדור שמרכזו x ורדיוסו x גם כן). לכן x מבודדת.
בכיוון $(\Leftarrow)$ נניח x נקודה מבודדת. אזי קיים רדיוס $r>0$ כך ש $B(x,r)=\{x\}$. נניח בשלילה כי $x=0$ אזי עבור n המקיים $\frac{1}{n}<r$ נקבל ש

$$d(x,\frac{1}{n})=d(0,\frac{1}{n})=|0|+\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<r$$

ולכן $\frac{1}{n}\in B(x,r)$ וקיבלנו סתירה.

(ג) תהא O קבוצה פתוחה ב $(\mathbb{R},d)$ המקיימת כי $0\in O$. הוכיחו כי קיים $r>0$ כך ש $(-r,r)\subseteq O$.
פתרון: כיוון ש O פתוחה ו 0 שייך אליה, קיים רדיוס $r>0$ כך ש $B(0,r)\subseteq O$ונראה כי $B(0,r)=(-r,r)$. אכן:

$$\begin{aligned}B(0,r)&=\{y\mid d(0,y)<r\}\\&=\{0\}\cup\{y\neq 0\mid d(0,y)<r\}\\&=\{0\}\cup\{y\neq 0\mid\ |0|+|y|<r\}\\&=\{0\}\cup\{y\neq 0\mid\ |y|<r\}\\&=(-r,r)\end{aligned}$$

(ד) האם הפונקציה $f(x)=x^2$ מ $(\mathbb{R},d)$ ל $(\mathbb{R},d)$ רציפה? הוכיחו תשובתכם.
פתרון: כן. הוכחה: תהא O פתוחה ב $(\mathbb{R},d)$ ונראה כי $f^{-1}(O)$ פתוחה גם כן שמה. אם $0\notin O$ נראה ש $f^{-1}\{x\}$ פתוחה לכל $x\in O$ ואז

$$f^{-1}(O)=\cup_{x\in O}f^{-1}\{x\}$$

גם כן פתוחה. אכן, יהא $x\in O$. אם $x<0$ נקבל ש $f^{-1}\{x\}=\emptyset$ שפתוחה. אחרת $x>0$ נקבל ש $f^{-1}\{x\}=\{\pm\sqrt{x}\}=\{\sqrt{x}\}\cup\{-\sqrt{x}\}$ שהיא פתוחה כיוון ש $\{-\sqrt{x}\},\{\sqrt{x}\}$ פתוחות לפי סעיפים קודמים ($\pm\sqrt{x}\neq 0$).
נטפל במקרה ש $0\in O$. לפי סעיפים קודמים, קיים $r>0$ כך ש $(-r,r)\subseteq O$. מתקיים כי

$$f^{-1}\left((-r,r)\right)=(-\sqrt{r},\sqrt{r})=B(0,\sqrt{r})$$

שהיא קבוצה פתוחה ולכן

$$f^{-1}(O)=\left[f^{-1}\left((-r,r)\right)\right]\cup\left[\cup_{x\in O\setminus(-r,r)}f^{-1}\{x\}\right]$$

פתוחה כאיחוד של פתוחות (האיחוד בסוגריים השמאליות פתוח בדומה למקרה ש $0\notin O$).

(ה) האם הפונקציה $g(x)=x+1$ מ $(\mathbb{R},d)$ ל $(\mathbb{R},d)$ רציפה? הוכיחו תשובתכם.
פתרון: לא. הוכחה: $[1,2)$ פתוחה שהרי היא שווה לאיחוד

$$[1,2)=\cup_{x\in[1,2)}\{x\}$$

וכל נקודות פתוח כמו שראינו. אבל $g^{-1}\left([1,2)\right)=[0,1)$ שאינו פתוח כי 0 שייך אליו אבל הוא לא מכיל שום קטע מהצורה $(-r,r)$ עבור $r>0$.

2. (כל סעיף 20 נקודות) יהא (X,d) מרחב מטרי ותהיינה A,B תתי קבוצות של X. הוכיחו/הפריכו:

(א) מתקיים כי $\mathrm{cl}\left(A\cup B\right)=\mathrm{cl}(A)\cup\mathrm{cl}(B)$ (כאשר $\mathrm{cl}(S)$ מסמן את הסגור של קבוצה S).
פתרון: הוכחה: בהכלה דו כיוונית:
$(\subseteq)$ $A\cup B\subseteq\mathrm{cl}\left(A\right)\cup\mathrm{cl}\left(B\right)$ כי כל קבוצה מוכלת בסגור שלה. בנוסף $\mathrm{cl}(S)$ היא קבוצה סגורה (לכל S) ולכן $\mathrm{cl}\left(A\right)\cup\mathrm{cl}\left(B\right)$ קבוצה סגורה כאיחוד של סגורות. לכן $\mathrm{cl}\left(A\cup B\right)\subseteq\mathrm{cl}\left(A\right)\cup\mathrm{cl}\left(B\right)$ כי $\mathrm{cl}\left(A\cup B\right)$ הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר (ביחס ההכלה) שמכילה את $A\cup B$.
$(\supseteq)$ $A\cup B\supseteq A,B$ ולכן $\mathrm{cl}\left(A\cup B\right)\supseteq\mathrm{cl}\left(A\right),\mathrm{cl}\left(B\right)$ ולכן $\mathrm{cl}\left(A\cup B\right)\supseteq\mathrm{cl}\left(A\right)\cup\mathrm{cl}\left(B\right)$.

(ב) מתקיים כי $\mathrm{cl}\left(A\cap B\right)=\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)$ (כאשר $\mathrm{cl}(S)$ מסמן את הסגור של קבוצה S).
פתרון: הפרכה: נסתכל ב $\mathbb{R}$ עם המטריקה האוקלידית ו

$$A=\left(0,1\right),B=\left(1,2\right)$$

שני קטעים פתוחים. מתקיים כי

$$\mathrm{cl}\left(A\cap B\right)=\mathrm{cl}\left(\emptyset\right)=\emptyset$$

ואילו

$$\mathrm{cl}(A)\cap\mathrm{cl}(B)=[0,1]\cap[1,2]=\{1\}$$

והם אינן שוות.