תרגול 5 אינפי 3

15 בינואר 2015

<u>תזכורת:</u>

רציפות במרחבים מטריים; נאמר שפונקציה $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ היא רציפה בנקודה $a\in X$, אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_1(a,x)<\delta$ אז $d_2(f(x),f(a))<\epsilon$.

<u>תרגיל:</u>

תהי $p_1:(\mathbb{R}^n,d_{max})\to(\mathbb{R},||)$ העתקת ההטלה על הרכיב הראשון. הראו שהיא רציפה.

<u>פתרון:</u>

צ"ל שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{max}(x,a)<\delta$ אזי $|x_1-a_1|<\epsilon$, כאשר $x=(x_1,...,x_n),a=(a_1,...,a_n)$.

מתקיים:

$$|x_1-a_1|<\underset{1\leq i\leq n}{max}\{|x_i-a_i|\}=d_{max}(x,a)$$

יהי $\epsilon>0$, נבחר $\delta=\epsilon$ ואז אם $d_{max}(x,a)<\delta$ אזי $|x_1-a_1|<\delta=\epsilon$.

באופן כללי, ההטלה על כל רכיב היא רציפה.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, ונסמן: $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|f(x)=y\}$. זהו הגרף של הפונקציה. הראו ש-G סגורה ב-$\mathbb{R}^2$.

<u>פתרון:</u>

תהי סדרה $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq G$ המתכנסת (לפי d_{max}) לנקודה (x,y). צ"ל $(x,y)\in G$.

נזכור שההטלה p_1 רציפה. לכן:

$$x_n = p_1(x_n, y_n) \to p(x, y) = x$$

באופן דומה, ההטלה p_2 רציפה ולכן $y_n \to y$.

כעת, מכיוון שהפונקציה רציפה, $y_n = f(x_n) \to f(x)$ ומיחידות הגבול נקבל: $y = f(x)$.

לכן $(x, y) \in G$ ולכן הקבוצה G סגורה.

<u>תרגיל:</u>

בעזרת רציפות, הראו שהקבוצה $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | yx < 1\}$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x, y) = xy$. f רציפה במכפלת הטלות, ואז:

$$D = f^{-1}\{(-\infty, 1)\}$$

הקרן $(-\infty, 1)$ פתוחה ב־$\mathbb{R}$ ולכן גם D פתוחה.

הגדרה:

נאמר שפונקציה $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ היא רציפה במידה שווה, אם לכל $0 < \epsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שאם $x_1, x_2 \in D$ מקיימים $d_1(x_1, x_2) < \delta$ אז $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

משפט ויירשטראס: פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית מקבלת שם מינימום ומקסימום.

פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית רציפה בה במ"ש.

<u>תרגיל:</u>

תהי $K \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית ונגדיר $f : K \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x, y) = x^2 + sin^2(e^{\frac{x}{y}})$$

הוכיחו כי קיים $a \in \mathbb{R}$ חיובי כך שלכל $(x, y) \in K$ מתקיים: $a \leq f(x, y)$.

<u>פתרון:</u>

מכיוון שהפונקציה f רציפה על קבוצה קומפקטית יש לה מינימום ומקסימום ב־K.

נסמן את ערך המינימום ב־a.

לכן, קיימת $K \ni (x_0,y_0)$ כך ש-$f(x_0,y_0)=a$ ולכל $(x,y)\in K$ מתקיים $a \le f(x,y)$.

יתר על כן, ברור שמתקיים:

$$f(x,y)=x^2+sin^2(e^{\frac{x}{y}})\geq 0$$

נניח בשלילה שקיימת $(x,y)\in K$ עבורה $f(x,y)=0$. כלומר:

$$x^2=0$$

$$sin^2(e^{\frac{x}{y}})=0$$

מהשיוויון הראשון נקבל $x=0$ אך זה נותן $sin^2(e^{\frac{0}{y}})=sin^2 1\neq 0$ וסתירה!

לכן לא קיימת נקודה (x,y) כזו ולכן $f(x,y)>0$ לכל נקודה $(x,y)\in K$; בפרט, $f(x_0,y_0)=a>0$.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת על תחום D, רציפה לפי x ורציפה במ"ש לפי y (רציפות לפי משתנה אחד פירושה שמסתכלים על המשתנה האחר כקבוע). האם הפונקציה רציפה?

<u>פתרון:</u>

לא בהכרח. נתבונן בתחום $D=[-1,1]^2$ ובפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|y|}{|x|} & |y|\leq|x|,(x,y)\neq(0,0)\\ \frac{|x|}{|y|} & |x|<|y|\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הפונקציה שלנו רציפה לפי כל אחד מהמשתנים בנפרד (ומכיוון שזהו תחום סגור, היא גם רציפה במ"ש). אלא שאם נשאף לנקודה $(0,0)$ במסלול $x=0$ נקבל:

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=0$$

ואם נשאף במסלול $y = x$ נקבל:

$$\underset{x \to 0}{lim} f(x,x) = 1$$

כלומר הגבול לא קיים, ולכן הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

<u>תרגיל:</u>

האם הפונקציה $f(x,y) = cos\frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במ"ש בתחומים הבאים:

1. $A = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$.

לא. נתבונן בסדרות: $a_n = \left(\sqrt{1-\frac{1}{\pi n}}, 0\right), b_n = \left(\sqrt{1-\frac{1}{1-\pi(n+1)}}, 0\right)$. הן נמצאות בתחום שלנו ומתקיים:

$$a_n, b_n \to (1,0)$$

ולכן: $\|a_n - b_n\| \to 0$. אלא שמתקיים:

$$f(a_n) = cos\pi n, f(b_n) = cos\pi(n+1)$$

ולכן:

$$\|f(a_n) - f(b_n)\| = \|cos\pi n - cos\pi(n+1)\| = \|(-1)^n 2\| = 2$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש בתחום A.

2. $B = \{(x,y)|3<x^2+y^2<4\}$.

כן. נרחיב את התחום שלנו לתחום:

$$\{(x,y)|3 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

זו קבוצה סגורה וחסומה והפונקציה שלנו רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במ"ש עליו; לכן היא גם רציפה בתחום B החלקי לו.

הגדרה:

יהי X מרחב מטרי. קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קשירה אם לא קיימות קבוצות $U, V \subseteq X$ פתוחות, זרות ולא ריקות שאינן שוות ל$-X$ כך ש$-A = U \cup V$.

דוגמאות לקבוצות קשירות: קטעים פתוחים, קוביות, כדורים וכו'.

נאמר שקבוצה A היא קשירה מסילתית, אם לכל $a, b \in A$ קיימת פונקציה רציפה $\gamma : [0,1] \to A$ עבורה $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.

קשירות מסילתית גוררת קשירות. ההיפך לאו דווקא נכון!

<u>תרגיל:</u>

תהיינה A, B קשירות ב$-\mathbb{R}^n$. האם הקבוצות הבאות קשירות?

1. $A \cup B$.

לא. נתבונן בקבוצות: $A = (0,1), B = (5,6)$. כל אחת מהן קשירה, אך האיחוד לא קשיר (הקבוצות $U = A, V = B$ מכסות אותו).

2. $A \cap B$.

לא. ניקח: $A = \{(x,y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 3\} \cup \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$ וניקח: $B = \{(x,y) | 2 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 3\} \cup \{(x,y) | 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$. נסו לצייר ולהיווכח בעצמכם.