

ב"ש אנליזה 2 תשעז מועד א

1. חשבו את:

$$\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (\text{א})$$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \left\{ \begin{array}{l} f = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad f' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1} \\ g' = 1 \\ g = x \end{array} \right\} \\ &= x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x^2+1} \cdot x dx \\ &= x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)} dx \quad (\text{ב})$$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+[1-\sin^2(x)]} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin(x) \\ dt = \cos dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{-t^2+t+2} dt = - \int \frac{1}{(t-2)(t+1)} dt$$

נמשיך עם חישוב $\int \frac{1}{(t-2)(t+1)} dx$. בעזרת שברים חלקיים, קיימים A, B קבועים כך ש

$$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1}$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל $1 = A(t+1) + B(t-2)$. הצבה $t = -1$ תתן $1 = -3B$ ולכן $B = -\frac{1}{3}$.
הצבה $t = 2$ תתן $1 = 3A$ ולכן $A = \frac{1}{3}$. ולכן

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)} dx = - \int \frac{1}{(t-2)(t+1)} dt = - \left[\frac{1}{3} \int \frac{1}{t-2} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+1} dt \right] = \frac{1}{3} [-\ln|t-2| + \ln|t+1|] + C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית, לפי מונחי x המקוריים היא:

$$\frac{1}{3} [-\ln|\sin(x)-2| + \ln|\sin(x)+1|] + C$$

2.

(א) מצאו את כל האיסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = xe^{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבול מימין

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\infty, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' \cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{e^\infty\} = \infty$$

ונחשב את הגבול משמאל

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = \{0 \cdot e^{-\infty}\} = 0$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית $x = 0$ (מצד ימין).

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1 \right]}{\left(\frac{1}{x}\right)} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = e^0 = 1$$

ולכן $y = x + 1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[e^{\left(\frac{1}{x}\right)} - 1 \right]}{\left(\frac{1}{x}\right)} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = e^0 = 1$$

ולכן $y = x + 1$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2-x+1} dx$

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x = 1$ שהרי המונה $x^2 - x + 1$ לא מתאפס $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$.

נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ שמתכנס ולכן גם מתכנס. לכל $1 \leq x$ מתקיים כי $0 < x^2 - x + 1$

שהרי $x^2 - x + 1$ אינו מתאפס והצבה שרירותית של 2 תראה ש $2^2 - 2 + 1 > 0$. בנוסף $\arctan(x) > 0$ בתחום לכל x

חיובי ובפרט לכל $1 \leq x$. ולכן $\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1} > 0$ בתחום $[1, \infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \arctan(x)}{x^2 - x + 1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\pi/2}{1 - 0 + -} = \frac{\pi}{2}$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x e^{-t^2} dt}{e^x - 1}$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = 0$ (כיוון ש e^{-t^2} רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x e^{-t^2} dt}{e^x - 1} \stackrel{\substack{= \\ \frac{0}{0}, \text{L'Hopital}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} + e^{-(-x)^2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-x^2}}{e^x} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n}$ **פתרון:** מתקיים

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n} \geq n \cdot \frac{n}{n+n} = n \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty$$

ולפי חצי סנוויץ, נקבל ש $a_n \rightarrow \infty$.

.4

(א) קרבו את $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$. **פתרון:** טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב x^2 במקום x , נקבל

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

ולכן

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 (x^{4n+2}) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3}$$

וכעת: כיוון שזהו טור לייבניץ מתקיים שלכל k , יש את החסם

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3} \right| \leq \left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{4k+3} \right| = \frac{1}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{4k+3}$$

זהו חסם על השגיאה $\left| \int_0^1 \sin(x^2) dx - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3} \right|$ כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!} \cdot \frac{1}{4k+3} \leq \frac{1}{100}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{120} \cdot \frac{1}{11} < \frac{1}{100}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{4n+3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7} = \frac{13}{42}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש.

(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-1}{2^n n!}$.

פתרון: נסדר קצת

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!-1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$$

כאשר המעבר מוצדק ע"י שנראה ששני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$ מתכנסים ובעזרתם נחשב את התשובה הסופית. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot (2) = 1$$

פשוט לחישוב כי זהו טור הנדסי. כעת, לטור השני:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = e^{\frac{1}{2}} - 1$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהשוויון הידוע ש $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (לכל x). לכן התשובה הסופית היא

$$1 - \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 2 - e^{\frac{1}{2}}$$

5. תהינה פונקציות f, g פונקציות חיוביות כך ש $\frac{f'g-g'f}{g^2} \leq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^{\infty} f$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} g$ מתכנס.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^{\infty} g$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} f$ מתכנס.

פתרון: נשים לב שכיוון ש g חיובית נוכל להסתכל על הפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ואז $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$. לפי הנתון $h'(x) \leq 0$ לכל x ולכן נסיק ש h פונקציה יורדת. מכאן ש $h(x) \leq h(0)$ לכל $x \geq 0$. מכאן שלכל $0 \leq x$ מתקיים

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{f(0)}{g(0)}$$

ולכן

$$f(x) \leq \frac{f(0)}{g(0)}g(x)$$

ולכן $\int_0^{\infty} g$ מתכנס אז גם $\int_0^{\infty} \frac{f(0)}{g(0)}g = \frac{f(0)}{g(0)} \int_0^{\infty} g$ כי זה כפל בקבוע. ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון (כיוון ש f, g חיוביות וגם $\frac{f(0)}{g(0)}$ חיובי) נקבל ש $\int_0^{\infty} f$ מתכנס. וזה עונה על הסעיף השני. לגבי הסעיף הראשון, נוכל לתת כדוגמה נגדית את הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ -2x + 3 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -x + 2 & x < 1 \end{cases}$$

מתקיים ש

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(1+h) + 3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = -2$$

וגם

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2 \frac{1}{1^3} = -2$$

ולכן $f'(1) = -2$. באופן דומה $g'(1) = -2$ ולכן

$$f'(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{x^3} & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

ובנוסף, f, g חיוביות ומתקיים

$$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = \begin{cases} -2\frac{1}{x^4} - (-\frac{1}{x^4}) & x \geq 1 \\ -2(-x+2) - (-1)(-2x+3) & x < 1 \end{cases}$$

ומכיון ש $-2\frac{1}{x^4} - (-\frac{1}{x^4}) = -\frac{1}{x^4} < 0$ וגם

$$-2(-x+2) - (-1)(-2x+3) = 2x - 4 + (-2x+3) = -1 < 0$$

נקבל שאכן $\frac{f'g - g'f}{g^2} \leq 0$ לכל x (החילוק במשהו חיובי, לא משנה את הסימן). ומצאנו הפרכה לסעיף א.