83-110 אלגברה לינארית להנדסה – מועד א' תשפ"ב – 27/01/22

מרצים: דר' אליהו מצרי, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

יש לענות על **כל** 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

מומלץ לקרוא ראשית את כל השאלות, הן <u>לא</u> מסודרות לפי רמת קושי

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהיינה מטריצות $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (עם m שורות וn עמודות).

<u>הוכיחו או הפריכו</u> את הטענות הבאות:

א. אם בA יש שורת אפסים, אזי $\dim C(A)<n$.

ב. A^tB הפיכה אם ורק אם AB^t הפיכה.

ג. $R(A)=N(B)$ אם ורק אם $BA^t=0$.

זכרו:

$R(A)$ הוא מרחב השורות של המטריצה A,

$C(A)$ הוא מרחב העמודות של המטריצה A,

$N(A)$ הוא מרחב האפס של המטריצה A (כלומר מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה).

המשך שאלה 1:

המשך שאלה 1:

2. תהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

א. יהיו שני ערכים עצמיים שונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$ של A עם ו"ע מתאימים v_1, v_2.

הוכיחו שאם $a \cdot b \neq 0$ אז $u = av_1 + bv_2$ <u>אינו</u> ו"ע של A.

ב. הוכיחו כי λ הוא ע"ע של המטריצה A אם ורק אם אפס הוא ע"ע של $A - \lambda I$.

ג. יהי λ ע"ע של A ויהי $c \in \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו: $c\lambda$ הוא ע"ע של cA.

המשך שאלה 2:

דף נוסף לשאלה מספר _____

3. נביט בתתי המרחב של $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית והנורמה המושרית.

$$U = \{(x, y, z) | 2x + y - z = 0\}$$

$$W = span\{(1,0,1), (0,1,0), (1, -1,1)\}$$

א. מצאו בסיסים אורתונורמליים ל-U, W.

ב. מצאו בסיס ל-$U \cap W$.

ג. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$ המכיל בסיס אורתונורמלי ל-U.

המשך שאלה 3:

דף נוסף לשאלה מספר _____

4. נביט במטריצה <u>המרוכבת</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, כאשר $a \in \mathbb{C}$ פרמטר.

א. חשבו את $\det(A)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

ב. מצאו את כל ערכי $a \in \mathbb{C}$ עבורם המטריצה A הפיכה.

ג. מצאו את כל ערכי $a \in \mathbb{C}$ עבורם $(1,1,1) \notin C(A)$

המשך שאלה מספר 4:

המשך שאלה מספר 4:

דף נוסף לשאלה מספר _____

5. תהי $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$T(x, y, z) = (x - y, x + z)$$

א. מצאו מטריצה A כך שלכל $v \in \mathbb{R}^3$ מתקיים כי $Tv = Av$.

ב. מצאו בסיס ל$\ker(T)$.

ג. מצאו בסיס ל$Im(T)$.

המשך שאלה מספר 5:

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר ______